

CAHIER DE VACANCES - MATHÉMATIQUES MPSI

Été 2026

Table des matières

I Énoncés	3
Récurrence	4
Calculs	4
Sommes et produits	4
Étude de fonctions	5
Fonctions réciproques	5
Nombres complexes	6
Primitives	6
Borne supérieure et inférieure	7
Équations différentielles	7
Suites numériques	8
Matrices	9
Bijections	10
Arithmétique	10
Limites	11
Continuité	11
Structures algébriques	11
Dérivation	12
Convexité	13
Polynômes	13
Espaces vectoriels	14
Dénombrement	14
Applications linéaires	15
Analyse asymptotique	15
Dimension finie	16
Fractions rationnelles	17
Calcul intégral	17
Probabilités finies	18
Groupe symétrique	20
Déterminants	20
Séries numériques	20
Familles sommables	21
Espaces préhilbertiens	21
II Corrigés	23

La difficulté des exercices est mesurée par le nombre d'étoiles. Un hyperlien permet de naviguer de l'énoncé au corrigé et réciproquement.

Si vous détectez des coquilles, je vous serais reconnaissant de bien vouloir me les signaler à l'adresse : blandelle.math@gmail.com

I Énoncés

Récurrance

Exercice 1 (*)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n)! \geq 2^n n!$

Exercice 2 (*)

On rappelle qu'une fonction polynomiale est dérivable autant de fois qu'on le souhaite. On pose $f(x) = x^n$ pour x réel avec n entier non nul. Pour k entier, on note $f^{(k)}$ la dérivée k -ième de f .

Montrer $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = k! \binom{n}{k} x^{n-k}$

Exercice 3 (**)

On note $A = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k, (\alpha_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \{0, 1\}^{n-1} \times \{1\}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Montrer que tout entier non nul possède une unique écriture dans A .

Exercice 4 (**)

Établir $\forall n \geq 2 \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$

Calculs

Exercice 5 (*)

Montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

Exercice 6 (*)

Montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$

puis déterminer le cas d'égalité.

Exercice 7 (*)

Soit m réel et $\varepsilon > 0$. Dans l'équivalence

$$|x - m| \geq \varepsilon \iff x \in I$$

déterminer I sous forme d'intervalle ou d'union d'intervalles.

Exercice 8 (**)

Soit x réel et a, b entiers non nuls, montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$$

Sommes et produits

Exercice 9 (*)

Soit n entier. Exprimer à l'aide de factorielles les produits $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$ et $\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$.

Exercice 10 (**)

Par convention, on note $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$ des entiers.

1. Soit n entier non nul. Calculer $\sum_{k=1}^n \binom{k}{2}$ en utilisant une écriture télescopique.
2. En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^n k^2$.

Exercice 11 (***)

Soit n entier. Calculer $\sum_{k=1}^n k3^k$

Exercice 12 (**)

Soit $(a_n)_n$ suite à valeurs dans \mathbb{K} . Montrer que

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^n (\ell+1)a_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{2n} (2n-\ell+1)a_\ell$$

Étude de fonctions

Exercice 13 (*)

Montrer $\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(x) \leq e^{x^2/2}$

Exercice 14 (**)

Soit $\alpha \in]0; 1]$. Établir $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |x^\alpha - y^\alpha| \leq |x - y|^\alpha$

Exercice 15 (***)

Montrer $\forall x \in [0; \pi] \quad \sin(x)^2 \leq \frac{4}{\pi^2} x(\pi - x)$

Fonctions réciproques

Exercice 16 (*)

Simplifier en précisant le domaine de définition

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exercice 17 ()**

Représenter le graphe de la fonction $x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos(x))$.

Exercice 18 (*)**

Montrer en précisant le domaine de définition

$$|\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))| = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)$$

Exercice 19 (*)**

Résoudre
$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Nombres complexes

Exercice 20 (*)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Montrer

$$|a| = 1 \quad \text{ou} \quad |b| = 1 \quad \implies \quad \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$$

Exercice 21 ()**

Pour x réel et n entier, linéariser $\cos(x)^n$ puis $\sin(x)^n$.

Exercice 22 (*)**

Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Calculer $S_{n,p} = \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 23 (*)**

Soit n entier non nul. Montrer que

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \quad \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

et que l'égalité est une inégalité si et seulement si

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad z_i = |z_i| e^{i\theta}$$

Primitives

Exercice 24 (*)

Calculer
$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt$$

Exercice 25 (**)

Primitive de

$$x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$$

Exercice 26 (***)

Pour $x > 1$ et $y > 1$, on note $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

1. Montrer
$$\beta(x, y) = \beta(y, x)$$

2. Établir
$$\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)$$

3. En déduire
$$\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$$

Borne supérieure et inférieure

Exercice 27 (*)

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et f, g fonctions majorées de I dans \mathbb{R} telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer

$$\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$$

Exercice 28 (**)

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . On définit $d(x, A) = \inf \{|x - a|, a \in A\}$. Montrer

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$$

Exercice 29 (***)

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et f fonction majorée de I dans \mathbb{R} et $\lambda \geq 0$. Montrer

$$\sup_{x \in I} \lambda f(x) = \lambda \sup_{x \in I} f(x)$$

Équations différentielles

Exercice 30 (*)

Résoudre $\cos(x)y' + \sin(x)y = \sin^2(x)$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

Exercice 31 (*)

Résoudre $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $] -1; 1 [$

Exercice 32 (*)

Soient u, v dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, non identiquement nulles, vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$$

1. Montrer qu'il existe λ réel tel que u et v soient solutions respectives de

$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$

2. Déterminer, en fonction de λ , la forme des fonctions u et v .

Exercice 33 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(-x) = e^x \quad (\text{E})$$

Exercice 34 (***)

Soit f dérivable sur \mathbb{R}_+ telle que

$$\forall x \geq 0 \quad |f'(x) + f(x)| \leq 1$$

Montrer $\forall x \geq 0 \quad |f(x) - e^{-x}f(0)| \leq 1 - e^{-x}$

Suites numériques

Exercice 35 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k+n^2}$ pour n entier.

Exercice 36 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$ pour n entier non nul.

Exercice 37 (**)

Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 \text{ réel} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + bn \quad \text{avec} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 38 (**)

Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

Exercice 39 (*)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour n entier.

Exercice 40 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\forall x \geq 0 \quad f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k$

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists! x_n \geq 0 \quad | \quad f_n(x_n) = 0$

2. Justifier $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \geq \frac{1}{2}$

3. Étudier la convergence de $(x_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 41 (***)

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans \mathbb{U} deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ dans \mathbb{C}^* . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^n$$

Montrer $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Exercice 42 (***)

Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de suite $(z^n)_n$ qui tend vers 1.

Matrices

Exercice 43 (**)

Soit la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1.

1. Calculer J^2 .
2. En déduire que $I_n + J$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 44 (**)

Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = XY^\top$. Déterminer une expression simple de M^p avec p entier.

Exercice 45 (**)

Soit $V = (\omega^{(k-1)(\ell-1)})_{1 \leq k, \ell \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$. Calculer $V\bar{V}$. En déduire l'inversibilité de la matrice V et préciser son inverse.

Exercice 46 (*)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } M = 1$. Montrer qu'il existe X et Y des matrices colonnes non nulles telles que $M = XY^\top$.

Exercice 47 (**)

Soit n entier non nul. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe p entier non nul tel que $M^p = 0$. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec B nilpotente et $AB = BA$. Montrer

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

Bijections

Exercice 48 (**)

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1 ; 1 [$.
2. Expliciter la réciproque f^{-1} .

Exercice 49 (***)

Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer

$$f \text{ bijective} \iff \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$$

Exercice 50 (***)

On définit $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ par

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

1. Justifier que π est définie de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} .
2. Montrer

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n+1) = \pi(m+1, n) + 1 \quad \text{et} \quad \pi(n+1, 0) = \pi(0, n) + 1$$

En déduire que π est surjective.

3. Montrer

$$\forall (m, n, m', n') \in \mathbb{N}^4 \quad m' + n' \geq m + n + 1 \implies \pi(m', n') > \pi(m, n)$$

En déduire l'injectivité de π .

Arithmétique

Exercice 51 (*)

Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad 5 \text{ divise } 2^{3n+5} + 3^{n+1}$

Exercice 52 (**)

Pour n entier non nul, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n . Établir l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d=1}^n \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

Exercice 53 (**)

Soient a et p des entiers supérieurs à 2.

Montrer que si $a^p - 1$ est premier, alors $a = 2$ et p est premier.

Exercice 54 (**)

Soient a, b dans \mathbb{Z} . Établir l'égalité $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$ sans utiliser la décomposition de a et b en facteurs premiers.

Limites

Exercice 55 (*)

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\operatorname{Arctan}(x)} - \frac{2x}{\pi}$$

Exercice 56 (***)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b réels pour que $f : t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$ ait une limite en $+\infty$.

Exercice 57 (**)

Soit n entier non nul. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)]$.

Continuité

Exercice 58 (**)

Trouver toutes les application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en zéro vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x)$$

Exercice 59 (***)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|$

Exercice 60 (***)

On pose $\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $[0; 1]$.
2. La fonction $g : x \in [0; 1] \mapsto \lfloor f(x) \rfloor$ est-elle continue par morceaux sur $[0; 1]$?

Structures algébriques

Exercice 61 (*)

Soit (G, \times) un groupe et $Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G \quad xg = gx\}$ son *centre*. Soit φ un morphisme surjectif de G sur G . Montrer

$$\varphi(Z(G)) \subset Z(G)$$

Exercice 62 (**)

Soit (G, \star) un groupe.

1. Montrer qu'une union de deux sous-groupes de (G, \star) est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.
2. Le résultat se généralise-t-il à plus de deux sous-groupes ?

Exercice 63 (**)

On note

$$A = \left\{ \frac{m}{2^n}, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau.
2. Déterminer $U(A)$.

Dérivation

Exercice 64 (*)

Justifier les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin(x)| \leq |x| \quad |\operatorname{Arctan}(x)| \leq |x|$$

Exercice 65 (*)

En considérant la dérivée n -ième de l'application polynomiale $x \mapsto x^{2n}$, déterminer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 66 (**)

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k + (-1)^k}{n^3}\right)$$

Exercice 67 (**)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$ pour n entier.

Exercice 68 (*)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples avec $\deg P > 1$. Montrer que P' est également scindé à racines simples.

Exercice 69 (***)

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = \varphi(x)\varphi(1-x) \quad \theta(x) = \frac{\int_0^x \psi(t) dt}{\int_0^1 \psi(t) dt}$

1. Justifier que la fonction φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$ et que pour tout entier n , il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x > 0 \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(x)$$

2. En déduire que la fonction φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
3. Représenter les graphes des fonctions ψ et θ .
4. Montrer qu'il existe une fonction $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$0 \leq \eta \leq 1 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \quad \eta(x) = 1 \quad \forall x \notin]-1; 1[\quad \eta(x) = 0$$

Convexité

Exercice 70 (*)

Établir $\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1-x)$

Exercice 71 (*)

Soient $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Montrer $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$

Exercice 72 (**)

Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad a^{1/p}b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$
2. Montrer que pour tout n entier et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ réels positifs, on a

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \sum_{k=1}^n b_k^q$$

Polynômes

Exercice 73 (**)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
2. En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Exercice 74 (**)

Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \quad P(x) = \sqrt[3]{x}$$

Exercice 75 (**)

Soit n entier et θ réel. Établir

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) \quad \text{avec} \quad T_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$$

Exercice 76 (**)

Soit $(P_n)_n$ suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$P_0 = 2, \quad P_1 = X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

1. Calculer P_2, P_3 .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
3. Montrer que pour tout $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^*$ $P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$.
4. En déduire une expression simple de $P_n(2 \cos(\theta))$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer les racines de P_n .

Exercice 77 (***)

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Espaces vectoriels

Exercice 78 (*)

Soit n entier non nul, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $H = \{M \in E \mid \text{Tr}(M) = 0\}$. Montrer que $E = H \oplus \text{Vect}(I_n)$.

Exercice 79 (**)

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour λ réel, on note $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E .

Exercice 80 (***)

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et on note $u_i = (1, a_i, \dots, a_i^n)$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer

$$(u_0, \dots, u_n) \text{ libre} \iff \text{Card} \{a_0, \dots, a_n\} = n + 1$$

Dénombrement

Exercice 81 (**)

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ dont l'intersection est de cardinal 1.

Exercice 82 (**)

On choisit 11 nombres parmi $\{1, \dots, 20\}$. Montrer qu'on en trouve au moins deux dont la somme vaut 21.

Exercice 83 (***)

Pour p et n entiers, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$. Par convention, on pose $\llbracket 1; 0 \rrbracket = \emptyset$.

1. Préciser $\text{Card}(\llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket})$.

2. Pour p et n entiers, établir
$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

3. Soit n entier et u_0, \dots, u_n des réels. Simplifier

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell$$

4. En déduire une formule donnant $S_{p,n}$ pour p et n entiers.

Applications linéaires

Exercice 84 (**)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe n entier non nul tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Exercice 85 (***)

Soit E un \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{id}$.

1. Montrer
$$E = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id})$$

2. Montrer

$$\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Im}(f^2 + f + \text{id}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f - \text{id}) = \text{Ker}(f^2 + f + \text{id})$$

Exercice 86 (***)

Soit E un \mathbb{K} -ev et p, q des projecteurs de E . Montrer que

$$p - q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = q$$

Quand cette condition est réalisée, montrer

$$\text{Im}(p - q) = \text{Im } p \cap \text{Ker } q \quad \text{et} \quad \text{Ker}(p - q) = \text{Ker } p + \text{Im } q$$

Analyse asymptotique

Exercice 87 (*)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

Exercice 88 (**)

Déterminer le DL₃(0) de $\sin(\pi\sqrt{1+x})$.

Exercice 89 (**)

Soit n entier non nul et $f(x) = (1 - e^x)^n$ pour tout x réel.

1. Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p$ pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Dimension finie

Exercice 90 (*)

Soient E, F des \mathbb{K} -ev et f, g dans $\mathcal{L}(E, F)^2$ avec $\text{Im } f$ et $\text{Im } g$ de dimension finie. Montrer

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Exercice 91 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = M - \frac{1}{n} \text{Tr}(M)I_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis calculer φ^2 et préciser $\text{Ker } \varphi, \text{Im } \varphi$.

Exercice 92 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. Déterminer une base de $\text{Ker } \text{Tr}$.

Exercice 93 (**)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E . On pose

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-anneau et un sev de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer
$$\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$$
3. Déterminer $\dim \mathcal{C}(u)$.

Exercice 94 ()**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 95 ()**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier non nul. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = X(X-1)P' - nXP$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Préciser $\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi$ où \mathcal{C} désigne la base canonique de E .
2. Déterminer des bases de $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

Fractions rationnelles

Exercice 96 (*)

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Exercice 97 ()**

1. Soient A, B dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg A < \deg B$. On suppose B scindé à racines simples avec $B = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$. Montrer

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}$$

2. Soit z_1, \dots, z_n des complexes non nuls deux à deux distincts. On note $P = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$.

Calculer $\sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)}$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

Exercice 98 ()**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples x_1, \dots, x_n et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P'(\alpha) \neq 0$. Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que

$$|\alpha - x_i| \leq n \left| \frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)} \right|$$

Calcul intégral

Exercice 99 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\int_a^b f(t)e^{int} dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.
2. En déduire les comportements de $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt$ et $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 100 (**)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right)$ avec $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$

Exercice 101 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt$ et $J_n = \int_0^\pi t |\sin(nt)| dt$

Montrer que les suites $(I_n)_{n \geq 1}$ et $(J_n)_{n \geq 1}$ sont constantes.

Exercice 102 (Intégrale de Wallis **)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geq 2$.
2. Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles en distinguant selon la parité de n .
3. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_n$.
4. En considérant la suite $(nI_n I_{n-1})_{n \geq 1}$, déterminer un équivalent de I_n pour $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 103 (**)

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ si q est non nul.
2. En déduire une expression de $I_{p,q}$ avec des factorielles.

Probabilités finies

Exercice 104 (**)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ et $p \in]0; 1[$. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note

$Y_k = \prod_{i=1}^k X_i$, $a_k = \mathbb{P}(Y_k = 1)$ et $b_k = \mathbb{P}(Y_k = -1)$.

1. Montrer $\exists Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$

2. En déduire une expression de a_n en fonction de n et p .

Exercice 105 (**)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

Exercice 106 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini, U et V des variables aléatoires réelles vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(U^k) = \mathbb{E}(V^k)$$

Montrer que U et V ont même loi.

Exercice 107 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\llbracket 0; 2N \rrbracket$ avec N entier non nul. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $m = \mathbb{E}(X_1)$.
2. Soit $t > 0$. Justifier l'égalité

$$\left\{ S_n \geq \frac{3nm}{2} \right\} = \left\{ e^{t(S_n - nN)} \geq e^{\frac{tNn}{2}} \right\}$$

3. En déduire $\forall t > 0 \quad \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{3nm}{2}\right) \leq e^{n\varphi(t)}$

avec
$$\varphi(t) = -\frac{Nt}{2} + \ln\left(\frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)}\right) - \ln(2N+1)$$

4. Déterminer un développement limité de φ en 0 à l'ordre 1.
5. Conclure qu'il existe $r \in]0; 1[$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{3nm}{2}\right) \leq r^n$$

Exercice 108 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer $\mathbb{P}\left(S_n > \frac{np}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ et $\mathbb{P}\left(S_n \leq \frac{np}{2}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Dans ce qui suit, on note

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = \left\{ S_n > \frac{np}{2} \right\} \quad \text{et} \quad B_n = \left\{ S_n \leq \frac{np}{2} \right\}$$

2. Montrer $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \left(\left| \text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2} \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Groupe symétrique

Exercice 109 (*)

Soit $c = (i_1 \dots i_p)$ un p -cycle de S_n . Pour $\sigma \in S_n$, déterminer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Exercice 110 (*)

Soit $n \geq 2$. Calculer

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)$$

Exercice 111 (*)

Soit $n \geq 2$ et $\sigma \in S_n$. On note r le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints et p le nombre de points fixes. Déterminer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n , r et p .

Déterminants

Exercice 112 (**)

Soient a, x, y, z des complexes. Calculer le déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{vmatrix} a & x & \dots & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix}$$

Exercice 113 (**)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec n entier non nul. Montrer que si les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 114 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans A partie finie de \mathbb{R} . On définit

$$\forall \omega \in \Omega \quad V(X_1, \dots, X_n)(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_1(\omega) & \dots & X_n(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{n-1}(\omega) & \dots & X_n^{n-1}(\omega) \end{vmatrix}$$

Déterminer $\mathbb{E}(V(X_1, \dots, X_n))$.

Séries numériques

Exercice 115 (**)

Nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{n^4+1})$.

Exercice 116 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 117 (**)

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}$.

Indication : considérer $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Exercice 118 (Constante γ d'Euler **)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

Familles sommables

Exercice 119 (*)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la nature des séries de terme général :

1. $\frac{1}{\sigma(n) + n^2}$

2. $\frac{1}{\sigma(n)^2 + n}$

Exercice 120 (**)

Soit α réel. Étudier la somme $\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$.

Exercice 121 (**)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Justifier l'existence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2}$ puis montrer

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2k+2) z^{2k} \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Espaces préhilbertiens

Exercice 122 (*)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta$$

Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 123 (**)

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k}$$

Exercice 124 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E .

1. Déterminer $(F + G)^\perp$.
2. En déduire $(F \cap G)^\perp$.

Exercice 125 (**)

Justifier l'existence puis calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt$.

Exercice 126 (*)

Soit E préhilbertien réel et a vecteur normé de E . On pose

$$\forall x \in E \quad f(x) = x - \langle x, a \rangle a$$

1. Justifier que $f \in \mathcal{L}(E)$ puis décrire f .
2. On suppose E euclidien muni de \mathcal{B} une base orthonormée. On note $A = \text{mat}_{\mathcal{B}} a$. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}} f$.

II Corrigés

Exercice 1 (*)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n)! \geq 2^n n!$

Corrigé : On note $\mathcal{P}(n) : (2n)! \leq 2^n n!$ pour n entier. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $1 \leq 1$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un rang n entier fixé. On a

$$(2n+2)! = 2(n+1)(2n+1)(2n)! \geq 2^{n+1}(n+1)!(2n+1) \geq 2^{n+1}(n+1)!$$

ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n)! \geq 2^n n!}$$

Exercice 2 (*)

On rappelle qu'une fonction polynomiale est dérivable autant de fois qu'on le souhaite. On pose $f(x) = x^n$ pour x réel avec n entier non nul. Pour k entier, on note $f^{(k)}$ la dérivée k -ième de f .

Montrer $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = k! \binom{n}{k} x^{n-k}$

Corrigé : Par récurrence.

Exercice 3 (**)

On note $A = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k, (\alpha_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \{0, 1\}^{n-1} \times \{1\}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Montrer que tout entier non nul possède une unique écriture dans A .

Corrigé : Soit $x \in A$. On a $x = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k$. Si tous les α_i valent 1, on a

$$x + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + 1 = 2^n - 1 + 1 = 2^n \in A$$

Sinon, notons $p = \min \{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \mid \alpha_k = 0\}$. On a

$$\begin{aligned} x + 1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k 2^k + 1 = \sum_{k=0}^{p-1} 2^k + 0 \times 2^p + \sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha_k 2^k + 1 \\ &= 2^p - 1 + 1 + \sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha_k 2^k = 2^p + \sum_{k=p+1}^{n-1} \alpha_k 2^k \in A \end{aligned}$$

Ainsi, la partie A contient 1 et tout élément y admet un successeur d'où, par principe de récurrence, il vient $A = \mathbb{N}^*$. Supposons que x s'écrive également $x = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k 2^k$. Si $n < m$, on aurait

$$x \leq 2^n - 1 \quad \text{et} \quad x \geq 2^{m-1} \geq 2^n$$

ce qui est absurde d'où $n = m$ (symétrie des rôles). Si les β_k diffèrent des α_k , on note $q = \max \{k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket \mid \alpha_k \neq \beta_k\}$. On a

$$x - x = 0 = \pm 2^q + \sum_{k=0}^{q-1} (\alpha_k - \beta_k) 2^k \quad \text{avec} \quad \left| \sum_{k=0}^{q-1} (\alpha_k - \beta_k) 2^k \right| \leq 2^q - 1 < 2^q$$

ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Tout entier non nul possède une unique écriture binaire.}}$$

Variante : Soit x entier non nul. On suppose $\llbracket 1; x \rrbracket \subset A$. Notons r_2 le reste de la division euclidienne par 2. On a

$$x + 1 - r_2(x + 1) = 2\ell$$

On a $\ell \leq x$ d'où $\ell \in A$ et par conséquent, on dispose de l'écriture $\ell = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i 2^i$ avec les $\beta_i \in \{0, 1\}$, $\beta_{n-1} = 1$. Ainsi, on a

$$x + 1 = r_2(x + 1) + \sum_{i=1}^n \beta_{i-1} 2^i \in A$$

Par principe de récurrence, on conclut $A = \mathbb{N}^*$

Exercice 4 (**)

Établir $\forall n \geq 2 \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n$

Corrigé : Soit $n \geq 2$. On a $\binom{2n}{n} < \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$

On pose $\mathcal{P}(n) : \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n}$

L'initialisation $\mathcal{P}(2)$ est vraie. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour $n \geq 2$ fixé. On a

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \binom{2n}{n} > \frac{2(2n+1)}{n+1} \frac{4^n}{2\sqrt{n}}$$

Puis, on a les équivalences

$$\begin{aligned} \frac{2(2n+1)}{n+1} \frac{4^n}{2\sqrt{n}} > \frac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}} &\iff (2n+1)\sqrt{n+1} > 2(n+1)\sqrt{n} \\ &\iff 4n^3 + 8n^2 + 5n + 1 > 4n^3 + 8n^2 + 4n \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Ainsi, on a

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < 4^n}$$

Remarque : Cette preuve ne permet pas de comprendre comment trouver une telle minoration. On a

$$\binom{2n}{n} = \frac{\prod_{k=1}^n (2k) \prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)}{(n!)^2} = \frac{2^{2n-1}}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2k+1}{2k} \right)$$

Or, on observe $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^2 = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{4k^2} > 1 + \frac{1}{k}$

d'où $\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n-1}}{n} \prod_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k+1}{k}}$

On obtient alors la minoration souhaitée.

Exercice 5 (*)

Montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$

Corrigé : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a les équivalences

$$(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \iff x^2 + 2xy + y^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \iff (x - y)^2 \geq 0$$

Cette dernière assertion étant vraie, on conclut

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)}$$

Exercice 6 (*)

Montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$

puis déterminer le cas d'égalité.

Corrigé : Soient x, y réels. On a $(|x| - |y|)^2 \geq 0$. En développant le carré, on en déduit l'inégalité attendue et le cas d'égalité a lieu si le carré est nul. On conclut

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \quad \text{avec} \quad |xy| = \frac{x^2 + y^2}{2} \iff |x| = |y|}$$

Exercice 7 (*)

Soit m réel et $\varepsilon > 0$. Dans l'équivalence

$$|x - m| \geq \varepsilon \iff x \in I$$

déterminer I sous forme d'intervalle ou d'union d'intervalles.

Corrigé : On a $|x - m| \geq \varepsilon \iff x - m \geq \varepsilon \quad \text{ou} \quad x - m \leq -\varepsilon$

Ainsi

$$\boxed{I =]-\infty; m - \varepsilon] \cup [m + \varepsilon; +\infty[}$$

Exercice 8 (**)

Soit x réel et a, b entiers non nuls, montrer

$$\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$$

Corrigé : On a $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \leq \frac{x}{a}$ puis $\frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \leq \frac{x}{ab}$

et par croissance de la partie entière $\left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$

Ensuite, on a $\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor \leq \frac{x}{ab}$ puis $\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor b \leq \frac{x}{a}$

Par croissance de la partie entière, il vient

$$\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor b \leq \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \quad \text{d'où} \quad \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor \leq \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b}$$

et de nouveau par croissance de la partie entière

$$\left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor$$

On conclut

$$\forall (x, a, b) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{N}^*)^2 \quad \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x/a \rfloor}{b} \right\rfloor$$

Exercice 9 (*)

Soit n entier. Exprimer à l'aide de factorielles les produits $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$ et $\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$.

Corrigé : Les produits d'entiers pairs consécutifs se factorisent. On complète les produits d'entiers impairs pour faire apparaître des factorielles :

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{(2k)(2k+1)} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2}$$

On conclut

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Exercice 10 (**)

Par convention, on note $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$ des entiers.

1. Soit n entier non nul. Calculer $\sum_{k=1}^n \binom{k}{2}$ en utilisant une écriture télescopique.
2. En déduire une expression simple de $\sum_{k=1}^n k^2$.

Corrigé : 1. D'après l'identité de Pascal, on a

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \iff \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1}$$

Par suite, pour n entier non nul, on trouve par télescopage

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^n \left[\binom{k+1}{3} - \binom{k}{3} \right] = \binom{n+1}{3} - \binom{1}{3}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

2. D'après ce qui précède, il vient pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \iff \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k + \frac{(n+1)n(n-1)}{3}$$

On conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 11 (***)

Soit n entier. Calculer

$$\sum_{k=1}^n k3^k$$

Corrigé : On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n k3^k = \sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} 3^k = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=\ell}^n 3^k = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^n [3^{n+1} - 3^\ell] = \frac{1}{4} (2n3^{n+1} - 3(3^n - 1))$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \frac{(2n-1)3^{n+1} + 3}{4}$$

Variante : Soit n entier. Un changement d'indice donne

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)3^{k+1} = 3 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)3^k = 3(S_n - n3^n) + \frac{3(3^n - 1)}{2}$$

On retrouve alors le résultat précédent. On pourrait aussi considérer $T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ (somme géométrique) et déterminer $xT'_n(x)$ puis évaluer en $x = 3$.

Exercice 12 (**)

Soit $(a_n)_n$ suite à valeurs dans \mathbb{K} . Montrer que

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^n (\ell+1)a_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{2n} (2n-\ell+1)a_\ell$$

Corrigé : On a

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^{2n} \left(\sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j=\ell} a_{i+j} \right) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \text{Card } I_\ell \quad \text{avec } I_\ell = \{(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 \mid i+j = \ell\}$$

Soit $\ell \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} I_\ell &= \{(i, \ell-i), i \in \llbracket 0; n \rrbracket, 0 \leq \ell-i \leq n\} \\ &= \{(i, \ell-i), i \in \llbracket 0; n \rrbracket, i \leq \ell, \ell-n \leq i\} = \{(i, \ell-i), i \in \llbracket \max(0, \ell-n); \min(n, \ell) \rrbracket\} \end{aligned}$$

Pour $\ell \in \llbracket 0; n \rrbracket$, il vient $I_\ell = \{(i, \ell-i), i \in \llbracket 0; \ell \rrbracket\}$

et pour $\ell \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$ $I_\ell = \{(i, \ell-i), i \in \llbracket \ell-n; n \rrbracket\}$

On conclut

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} a_{i+j} = \sum_{\ell=0}^n (\ell+1)a_\ell + \sum_{\ell=n+1}^{2n} (2n-\ell+1)a_\ell$$

Exercice 13 (*)

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) \leq e^{x^2/2}$$

Corrigé : Soit x réel. On a l'équivalence

$$\text{ch}(x) \leq e^{x^2/2} \iff \ln(\text{ch}(x)) \leq \frac{x^2}{2}$$

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(\text{ch}(x))$$

La fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x - \operatorname{th}(x) \quad f''(x) = \operatorname{th}(x)^2 \geq 0$$

Avec $f'(0) = 0$, on en déduit que f croît sur $[0; +\infty[$ et comme $f(0) = 0$, on conclut avec la parité de f

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}(x) \leq e^{x^2/2}}$$

Exercice 14 (**)

Soit $\alpha \in]0; 1]$. Établir $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |x^\alpha - y^\alpha| \leq |x - y|^\alpha$

Corrigé : On suppose $x \geq y \geq 0$. On pose $a = x - y$ et $b = y$ et on suppose a et b non tous nuls. Comme $u^\alpha \geq u$ pour $u \in [0; 1]$, il vient

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{a+b}\right)^\alpha \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$$

d'où $a^\alpha + b^\alpha \geq (a+b)^\alpha$

et l'inégalité vaut également si a ou b est nul. Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |x^\alpha - y^\alpha| \leq |x - y|^\alpha}$$

Variante : On suppose $x \geq y \geq 0$ avec y fixé. On pose

$$\forall x \geq y \quad g(x) = (x - y)^\alpha - x^\alpha + y^\alpha$$

Puis, on fait une étude de fonctions ...

Exercice 15 (***)

Montrer $\forall x \in [0; \pi] \quad \sin(x)^2 \leq \frac{4}{\pi^2} x(\pi - x)$

Corrigé : On pose $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{4}{\pi^2} t(\pi - t) - \sin(t)^2$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et il vient par dérivation

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = \frac{4}{\pi} - \frac{8}{\pi^2} t - \sin(2t) \quad f''(t) = -2 \left(\frac{4}{\pi^2} + \cos(2t) \right)$$

On en déduit que f'' croît strictement sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On observe

$$f''(0) = -2 \left(\frac{4}{\pi^2} + 1 \right) < 0 \quad \text{et} \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) > 0$$

Par conséquent, la fonction f'' réalise une bijection de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ sur son image qui contient zéro.

Ainsi, il existe $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f''(\alpha) = 0$ et on en déduit le tableau de variation de f' :

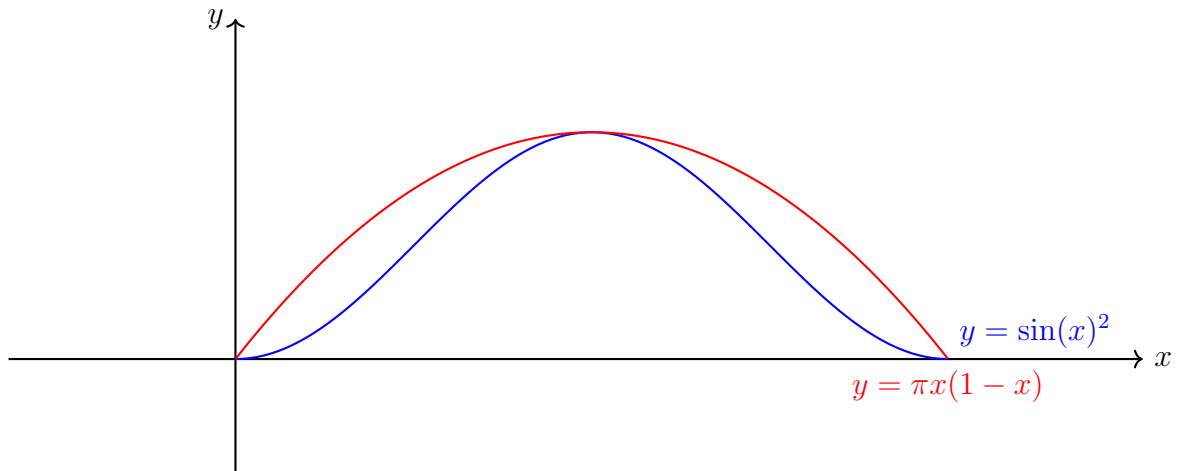
t	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$	$\frac{4}{\pi}$	$f'(\alpha)$	0

On en déduit $f'(\alpha) < 0$ et par conséquent, il un unique existe $\beta \in]0; \alpha[$ tel que $f'(\beta) = 0$ et on a le tableau de variation de f :

t	0	β	$\frac{\pi}{2}$
$f(t)$	0	$f(\beta)$	0

On conclut

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sin(t)^2 \leq \frac{4}{\pi} t (\pi - t)$$



Exercice 16 (*)

Simplifier en précisant le domaine de définition

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Corrigé : On pose $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$

La fonction f est bien définie et dérivable sur \mathbb{R}^* comme composée de telles fonctions. On trouve par dérivation

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+1/x^2} = 0$$

On en déduit que la fonction f est constante sur les intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ et en évaluant en $x = 1$ et $x = -1$, on conclut

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 17 (**)

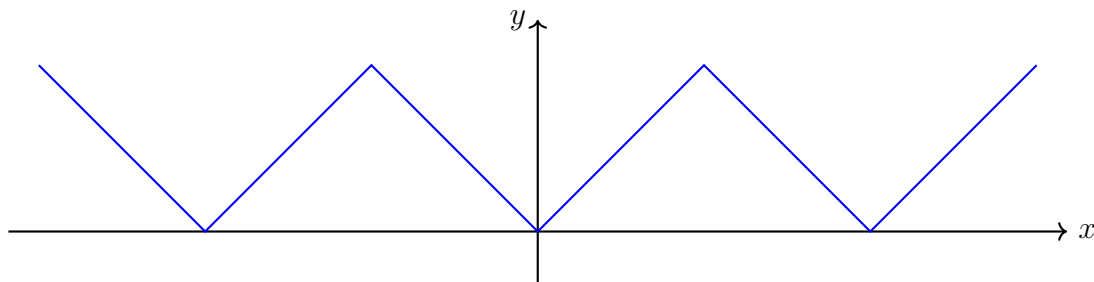
Représenter le graphe de la fonction $x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x))$.

Corrigé : On a $\forall x \in [0; \pi] \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = x$

La fonction est clairement paire d'où

$$\forall x \in [-\pi; 0] \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = -x$$

et elle est 2π -périodique d'où le graphe



Exercice 18 (***)

Montrer en précisant le domaine de définition

$$|\text{Arctan}(\text{sh}(x))| = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$$

Corrigé : Le domaine de définition de chaque membre est \mathbb{R} tout entier. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = \text{Arctan}(\text{sh}(x)) - \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R}_+ comme composée de telles fonctions. Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1 + \text{sh}(x)^2} + \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}(x)^2}}} = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}(x)^2} + \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} \frac{1}{\sqrt{\text{ch}(x)^2 - 1}} = 0$$

Ainsi, la fonction f est constante sur \mathbb{R}_+ et $f(0) = 0$. Par parité, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad |\text{Arctan}(\text{sh}(x))| = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\text{ch}(x)}\right)}$$

Variante : On a pour $x \geq 0$

$$\cos(\text{Arctan}(\text{sh}(x)))^2 = \frac{1}{1 + \tan(\text{Arctan}(\text{sh}(x)))^2} = \frac{1}{1 + \text{sh}(x)^2} = \frac{1}{\text{ch}(x)^2}$$

Puis
$$\cos(\text{Arctan}(\text{sh}(x))) = \frac{1}{\text{ch}(x)}$$

et le résultat suit.

Exercice 19 (***)

Résoudre
$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Corrigé : Posant $x = \frac{1}{\tan(\theta)}$ pour $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\setminus \left\{ 0, -\frac{\pi}{4} \right\}$, on a par trigonométrie

$$\begin{aligned} \text{Arctan}(\tan(\theta)) + \text{Arctan}\left(\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}\right) &= \theta - \text{Arctan}\left(\frac{\sin(\theta - \pi/4)}{\cos(\theta - \pi/4)}\right) \\ &= \theta - \text{Arctan} \tan(\theta - \pi/4) \end{aligned}$$

On rappelle que $\forall u \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{Arctan}(\tan(u)) = u$

et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{3\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$

L'angle $\theta - \frac{\pi}{4}$ sort donc de l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$. Pour $u \in \left] -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2} \right[$, on a par π -périodicité de \tan

$$\text{Arctan}(\tan u) = \text{Arctan}(\tan(u + \pi)) = u + \pi$$

Ainsi, on a

$$\text{Arctan}(\tan(\theta)) + \text{Arctan}\left(\frac{\cos(\theta) - \sin(\theta)}{\cos(\theta) + \sin(\theta)}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } \theta \in \left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right[\setminus \{0\} \\ -\frac{3\pi}{4} & \text{si } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} \right[\end{cases}$$

On conclut $\boxed{\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4} \iff x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[}$

Variante : On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \quad f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

et on dérive la fonction.

Exercice 20 (*)

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Montrer

$$|a| = 1 \quad \text{ou} \quad |b| = 1 \quad \implies \quad \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1$$

Corrigé : Si $|a| = 1$. On a

$$|a-b| = |a| |1 - a^{-1}b| = |1 - \bar{a}b| \neq 0$$

d'où le résultat. Si $|b| = 1$, on a

$$|a-b| = |\bar{b}| |a-b| = |\bar{a}\bar{b} - 1| = |1 - \bar{a}\bar{b}|$$

Ainsi

$$\boxed{|a| = 1 \quad \text{ou} \quad |b| = 1 \quad \implies \quad \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right| = 1}$$

Exercice 21 (**)

Pour x réel et n entier, linéariser $\cos(x)^n$ puis $\sin(x)^n$.

Corrigé : Soit x réel et n entier. On a

$$\cos(x)^n = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} e^{-i(n-k)x} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x}$$

Passant à la partie réelle, on conclut

$$\boxed{\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad \cos(x)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((2k-n)x)}$$

Puis
$$\sin(x)^n = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{1}{(2i)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{i(n-2k)x}$$

On distingue selon la parité. On a

$$\sin(x)^{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k e^{i2(n-k)x}$$

et passant à la partie réelle, il vient

$$\forall(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad \sin(x)^{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k \cos(2(n-k)x)$$

Enfin, on a
$$\sin(x)^{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} i \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k e^{i(2n+1-2k)x}$$

Passant à la partie réelle, il vient

$$\forall(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad \sin(x)^{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \sin((2n+1-2k)x)$$

Exercice 22 (***)

Soit $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Calculer $S_{n,p} = \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{kp\pi}{n+1}\right)$.

Corrigé : Si $p \in 2(n+1)\mathbb{Z}$, on trouve $S_{n,p} = n$. Supposons $p \notin 2(n+1)\mathbb{Z}$. On a

$$S_{n,p} = \operatorname{Re}(T_{n,p}) \quad \text{avec} \quad T_{n,p} = \sum_{k=1}^n e^{\frac{ikp\pi}{n+1}}$$

On reconnaît une somme géométrique dans l'expression de $T_{n,p}$ et il vient

$$T_{n,p} = e^{\frac{ip\pi}{n+1}} \frac{1 - e^{\frac{inp\pi}{n+1}}}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n+1}}} = \frac{e^{\frac{ip\pi}{n+1}} - e^{ip\pi}}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n+1}}}$$

Si l'entier p est pair, on trouve
$$T_{n,p} = \frac{e^{\frac{ip\pi}{n+1}} - 1}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n+1}}} = -1$$

Sinon, on obtient par une factorisation d'angle moitié

$$T_{n,p} = \frac{e^{\frac{ip\pi}{n+1}} + 1}{1 - e^{\frac{ip\pi}{n+1}}} = \frac{2 \cos\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)}{-2i \sin\left(\frac{p\pi}{2(n+1)}\right)}$$

On conclut

$$\forall(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \quad S_{n,p} = \begin{cases} n & \text{si } p \in 2(n+1)\mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } p \in 2\mathbb{Z} \setminus 2(n+1)\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 23 (***)

Soit n entier non nul. Montrer que

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \quad \left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

et que l'égalité est une inégalité si et seulement si

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad | \quad \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad z_i = |z_i| e^{i\theta}$$

Corrigé : On procède par récurrence sur n . Le résultat est trivial pour $n = 1$. Montrons le cas $n = 2$. Si l'un des deux complexes est nul, le résultat est immédiat. Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$. Si On a

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$$

On considère l'écriture trigonométrique $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$ avec θ_1, θ_2 réels. Il vient

$$2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 2 |z_1 z_2| \operatorname{Re} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = 2 |z_1 z_2| \cos(\theta_1 - \theta_2) \leq 2 |z_1 z_2|$$

avec égalité si et seulement si $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$, c'est-à-dire $\theta_2 \equiv \theta_1 [2\pi]$. Le résultat suit. On suppose le résultat vrai au rang n entier non nul fixé. Soit $(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On pose $Z = \sum_{i=1}^n z_i$. Il vient d'après le cas pour deux nombres complexes et l'hypothèse de récurrence

$$\left| \sum_{i=1}^{n+1} z_i \right| = |Z + z_{n+1}| \leq |Z| + |z_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|$$

Puis, si l'inégalité est une égalité, on en déduit notamment $\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| = \sum_{i=1}^n |z_i|$ d'où l'existence de θ réel tel que $z_i = |z_i| e^{i\theta}$ puis $Z = e^{i\theta} \sum_{i=1}^n |z_i|$ et d'après le cas d'égalité pour deux complexes, il vient $z_{n+1} = |z_{n+1}| e^{i\theta}$ ce qui clôt la récurrence.

L'inégalité triangulaire avec cas d'égalité est démontrée.

Exercice 24 (*)

Calculer $\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt$

Corrigé : En intégrant par partie, on trouve

$$\int^x \operatorname{Arctan}(t) dt = [x \operatorname{Arctan}(x)] - \int^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \operatorname{Arctan}(t) dt = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

Exercice 25 (**)

Primitive de $x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$

Corrigé : On a $\int^x \sqrt{2t - t^2} dt = \int^x \sqrt{1 - (t-1)^2} dt$

On pose $t - 1 = \sin u$ et il vient

$$\begin{aligned} \int^x \sqrt{1 - (t-1)^2} dt &= \int^{\text{Arcsin}(x-1)} \cos^2 u du \\ &= \int^{\text{Arcsin}(x-1)} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du = \left(\frac{u + \sin u \cos u}{2} \right)^{\text{Arcsin}(x-1)} \end{aligned}$$

De la trigonométrie permet d'obtenir $\cos \text{Arcsin}(x-1) = \sqrt{1 - (x-1)^2}$ d'où

$$\boxed{\int^x \sqrt{2t - t^2} dt = \frac{1}{2} [\text{Arcsin}(x-1) + (x-1)\sqrt{2x-x^2}]}$$

Exercice 26 (***)

Pour $x > 1$ et $y > 1$, on note $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

1. Montrer $\beta(x, y) = \beta(y, x)$

2. Établir $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)$

3. En déduire $\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$

Corrigé : Soit $x > 1$ et $y > 1$. Le changement de variable $u = 1 - t$ de classe \mathcal{C}^1 donne

$$\beta(x, y) = - \int_1^0 (1-u)^{x-1} u^{y-1} du = \int_0^1 u^{y-1} (1-u)^{x-1} du$$

Autrement dit $\boxed{\forall x > 1, y > 1 \quad \beta(x, y) = \beta(y, x)}$

Les fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto \frac{-1}{y} (1-t)^y$ sont de classe \mathcal{C}^1 d'où, par intégration par parties,

$$\beta(x+1, y) = \underbrace{\left[\frac{-1}{y} t^x (1-t)^y \right]_0^1}_{=0} + \frac{x}{y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt = \frac{x}{y} \beta(x, y+1)$$

d'où $\forall x > 1, y > 1 \quad y\beta(x+1, y) = x\beta(x, y+1)$

Par suite $(x+y)\beta(x+1, y) = x[\beta(x+1, y) + \beta(x, y+1)]$

$$= x \int_0^1 [t^x (1-t)^{y-1} + t^{x-1} (1-t)^y] dt$$

$$(x+y)\beta(x+1, y) = x \int_0^1 (1+t-t)t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = x\beta(x, y)$$

Ainsi $\boxed{\forall x > 1, y > 1 \quad \beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)}$

D'après la relation précédemment établie et la symétrie de β , on a

$$\beta(x+1, y+1) = \frac{x}{x+y+1} \beta(x, y+1) = \frac{x}{x+y+1} \beta(y+1, x) = \frac{x}{x+y+1} \frac{y}{x+y} \beta(y, x)$$

On conclut $\boxed{\forall x > 1, y > 1 \quad \beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)}$

Exercice 27 (*)

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et f, g fonctions majorées de I dans \mathbb{R} telles que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer

$$\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$$

Corrigé : On a $\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)$

et par conséquent

$$\boxed{\sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} g(x)}$$

Exercice 28 (**)

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . On définit $d(x, A) = \inf \{|x - a|, a \in A\}$. Montrer

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$$

Corrigé : Soit $(x, y, a) \in \mathbb{R}^2 \times A$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$|x - a| \leq |x - y| + |y - a|$$

La borne inférieure $d(x, A)$ minore $|x - a|$ d'où

$$d(x, A) \leq |x - y| + |y - a|$$

autrement dit

$$d(x, A) - |x - y| \leq |y - a|$$

Cette minoration vaut pour tout $a \in A$ ce qui signifie que $d(x, A) - |x - y|$ est un minorant de $\{|y - a|, a \in A\}$ et comme la borne inférieure de cet ensemble est le plus grand des minorants, il vient

$$d(x, A) - |x - y| \leq d(y, A)$$

d'où

$$d(x, A) - d(y, A) \leq |x - y|$$

Par symétrie des rôles, on conclut

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|}$$

Exercice 29 (***)

Soit I un intervalle non vide de \mathbb{R} et f fonction majorée de I dans \mathbb{R} et $\lambda \geq 0$. Montrer

$$\sup_{x \in I} \lambda f(x) = \lambda \sup_{x \in I} f(x)$$

Corrigé : Soit $x \in I$. On a $\lambda f(x) \leq \lambda \sup_{x \in I} f(x)$

puis

$$\sup_{x \in I} \lambda f(x) \leq \lambda \sup_{x \in I} f(x)$$

Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Elle est immédiate si $\lambda = 0$. Supposons $\lambda > 0$. Il vient, en appliquant l'inégalité précédemment obtenue

$$\sup_{x \in I} f(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{\lambda} \lambda f(x) \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{x \in I} \lambda f(x)$$

d'où

$$\lambda \sup_{x \in I} f(x) \leq \sup_{x \in I} \lambda f(x)$$

On conclut

$$\boxed{\sup_{x \in I} \lambda f(x) = \lambda \sup_{x \in I} f(x)}$$

Exercice 30 (*)

Résoudre $\cos(x)y' + \sin(x)y = \sin^2(x)$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$

Corrigé : L'espace des solutions de l'équation homogène est clairement Vect (cos). Par variation de la constante, on obtient

$$\lambda'(x) \cos^2 x = \sin^2 x \iff \lambda'(x) = \tan^2 x \iff \lambda(x) = \tan x - x + \alpha$$

Ainsi, on trouve $\boxed{\{x \mapsto \sin x - x \cos x + \alpha \cos x, \alpha \in \mathbb{R}\}}$

Exercice 31 (*)

Résoudre $\sqrt{1-x^2}y' + y = 1$ sur $] -1; 1 [$

Corrigé : La solution constante $x \mapsto 1$ est clairement une solution particulière. On trouve

$$\boxed{\{x \mapsto 1 + \lambda e^{-\text{Arcsin } x}, \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 32 (*)

Soient u, v dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, non identiquement nulles, vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$$

1. Montrer qu'il existe λ réel tel que u et v soient solutions respectives de

$$z'' + \lambda z = 0 \quad \text{et} \quad z'' - \lambda z = 0$$

2. Déterminer, en fonction de λ , la forme des fonctions u et v .

Corrigé : 1. Comme $v \neq 0$, il existe y_0 réel tel que $v(y_0) \neq 0$. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u''(x) + \lambda u(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{v''(y_0)}{v(y_0)}$$

Puis, comme $u \neq 0$, il existe x_0 réel tel que $u(x_0) \neq 0$ et par suite

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v''(x) + \mu v(x) = 0 \quad \text{avec} \quad \mu = \frac{u''(x_0)}{u(x_0)}$$

Enfin, en évaluant la relation initiale en (x_0, y_0) , on obtient

$$\lambda + \mu = 0$$

On conclut $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} \mid u'' + \lambda u = 0 \quad \text{et} \quad v'' - \lambda v = 0}$

2. Il existe a, b, c, d réels tels que

Si $\lambda = 0$	$\forall t \in \mathbb{R}$	$u(t) = a + bt$	$v(t) = c + dt$
Si $\lambda > 0$	$\forall t \in \mathbb{R}$	$u(t) = a \cos(\sqrt{\lambda}t) + b \sin(\sqrt{\lambda}t)$	$v(t) = ce^{\sqrt{\lambda}t} + de^{-\sqrt{\lambda}t}$
Si $\lambda < 0$	$\forall t \in \mathbb{R}$	$u(t) = ae^{\sqrt{-\lambda}t} + be^{-\sqrt{-\lambda}t}$	$v(t) = c \cos(\sqrt{-\lambda}t) + d \sin(\sqrt{-\lambda}t)$

Exercice 33 (**)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(-x) = e^x \quad (\text{E})$$

Corrigé : Soit f solution de (E). On a $f'(x) = -f(-x) + e^x$ pour x réel d'où f' dérivable. Par dérivation, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) - f'(-x) = e^x$$

En substituant x par $-x$ dans la relation de départ, on a $f'(-x) + f(x) = e^{-x}$ pour x réel d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + f(x) = 2 \operatorname{ch}(x)$$

Ainsi, il existe α, β réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{ch}(x) + \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$$

Réciproquement, on injecte dans l'équation (E) et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta)(\cos(x) - \sin(x)) = 0 \implies \alpha + \beta = 0$$

Finalement

$$\boxed{S_E = \{x \mapsto \operatorname{ch}(x) + \alpha(\cos(x) - \sin(x)), \alpha \in \mathbb{R}\}}$$

Remarque : La forme de S_E était en partie prévisible. En effet, il s'agit de résoudre une équation du type $\Phi(f) = \exp$ avec $\Phi : f \mapsto (x \mapsto f'(x) + f(-x))$ et on peut établir, en suivant la même trame que dans la résolution ci-avant, que le noyau $\operatorname{Ker} \Phi$ est une droite vectorielle.

Exercice 34 (***)

Soit f dérivable sur \mathbb{R}_+ telle que

$$\forall x \geq 0 \quad |f'(x) + f(x)| \leq 1$$

Montrer

$$\forall x \geq 0 \quad |f(x) - e^{-x}f(0)| \leq 1 - e^{-x}$$

Corrigé : Notons $g = f' + f$ et considérons cette relation comme une équation différentielle. On en déduit après variation de la constante une expression de f en fonction de g avec

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = \alpha e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

d'où
$$\forall x \geq 0 \quad f(x) - e^{-x}f(0) = e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt$$

et par inégalité triangulaire, en utilisant $|g(t)| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$

$$\forall x \geq 0 \quad |f(x) - e^{-x}f(0)| \leq e^{-x} \int_0^x e^t |g(t)| dt \leq e^{-x} \int_0^x e^t dt$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad |f(x) - e^{-x}f(0)| \leq 1 - e^{-x}}$$

Exercice 35 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k+n^2}$ pour n entier.

Corrigé : On a
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \frac{1}{n+n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{3}$$

D'où

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty}$$

Exercice 36 (*)

Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$ pour n entier non nul.

Corrigé : Pour n entier non nul, on a $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k) \leq n \ln(n)$ et par croissances comparées, on conclut

$$\boxed{\frac{\ln(n!)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Exercice 37 (**)

Déterminer une expression du terme général de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_0 \text{ réel et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + bn \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Corrigé : Si $a = 0$, le résultat est immédiat. Si $b = 0$, le résultat est immédiat aussi avec $u_n = a^n u_0$ pour tout n entier. Considérons a et b non nuls et posons $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout n entier. On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n &= u_{n+1} - u_n = au_n + bn - (au_{n-1} + b(n-1)) \\ &= a(u_n - u_{n-1}) + b = av_{n-1} + b \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_n$ est arithmético-géométrique. Par ailleurs, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \sum_{k=0}^{n-1} [u_{k+1} - u_k] = u_n - u_0$$

donc expliciter la suite $(v_n)_n$ permet d'expliquer la suite $(u_n)_n$. Si $a = 1$, on a $v_n = v_0 + nb = nb$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} kb$$

D'où

$$\boxed{\text{Si } a = 1, \text{ on a } u_n = u_0 + b \frac{n(n-1)}{2} \text{ pour tout } n \text{ entier.}}$$

Si $a \neq 1$, on a $v_n = \alpha + a^n(v_0 - \alpha)$ avec $\alpha = \frac{b}{1-a}$ puis

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha + a^k(v_0 - \alpha)] = n\alpha + \frac{1-a^n}{1-a}(v_0 - \alpha)$$

et $v_0 = u_1 - u_0 = (a-1)u_0 + b$. Ainsi

$$\boxed{\text{Si } a \neq 1, \text{ on a } u_n = u_0 + n\alpha + a^n \left(u_0 - \frac{a\alpha}{a-1} \right) \text{ pour tout } n \text{ entier.}}$$

Variante : Si $a \neq 1$, on peut aussi utiliser

$$v_n = u_{n+1} - u_n = (a-1)u_n + bn$$

d'où

$$u_n = \frac{1}{a-1} (v_n - bn)$$

Exercice 38 (**)

Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$$

Corrigé : Avec l'inégalité de concavité $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$, on trouve

$$\forall n \geq 2 \quad u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 0$$

et
$$\forall n \geq 1 \quad v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0$$

et
$$\forall n \geq 1 \quad u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

D'après le théorème des suites adjacentes, on conclut que

Les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes donc convergentes vers une même limite.

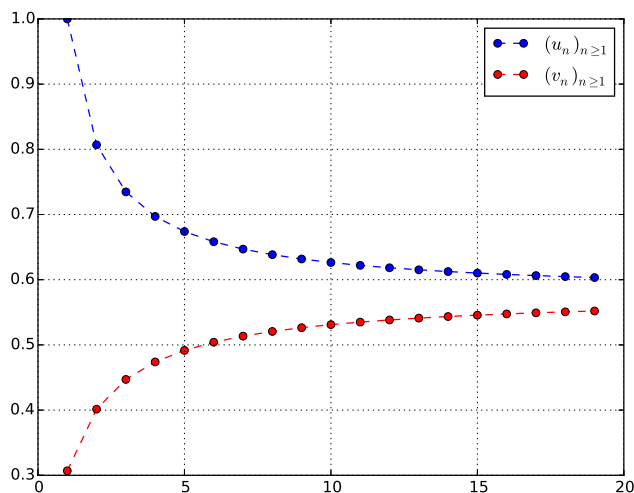


FIGURE 1 – Tracé des $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$

Exercice 39 (*)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour n entier.

Corrigé : Par récurrence immédiate, on a $u_n > 0$ pour tout n entier. On a $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$ par concavité d'où $u_{n+1} \leq u_n$ pour n entier donc la suite $(u_n)_n$ décroît et est minorée donc convergente par limite monotone. Comme $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur l'intervalle fermé \mathbb{R}_+ , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est nécessairement point fixe de f et on a $f(x) = x \iff x = 0$. On conclut

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

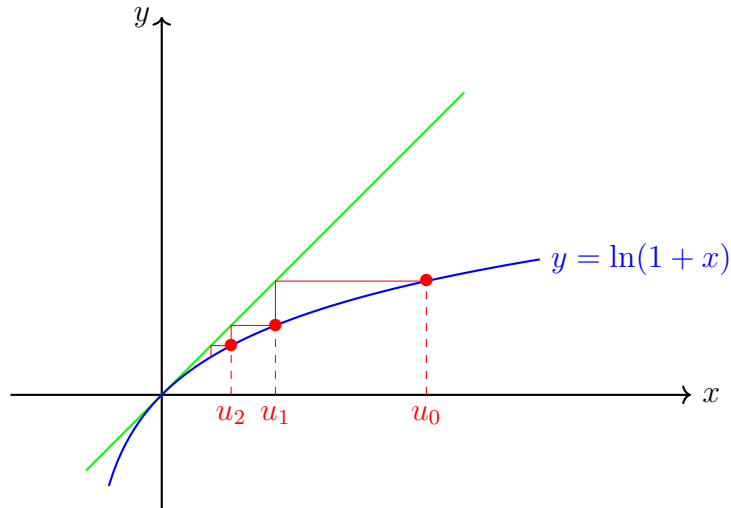


FIGURE 2 – Graphe de la suite $(u_n)_n$

Exercice 40 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\forall x \geq 0 \quad f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^n x^k$

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists ! x_n \geq 0 \mid f_n(x_n) = 0$

2. Justifier $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \geq \frac{1}{2}$

3. Étudier la convergence de $(x_n)_{n \geq 1}$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. La fonction f_n est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ comme somme de fonctions strictement croissantes et $f_n(0) = -1$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ d'où f_n réalise une bijection de \mathbb{R}_+ sur $[-1; +\infty[$. Ainsi

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad \exists ! x_n \geq 0 \mid f_n(x_n) = 0}$$

2. Soit n entier non nul. On a

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = -1 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$$

D'où

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad x_n \geq \frac{1}{2}}$$

3. Soit n entier non nul. On a clairement $f_n \leq f_{n+1}$ d'où

$$f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_{n+1}(x_n)$$

Par croissance stricte de f_{n+1} , il s'ensuit que $x_{n+1} \leq x_n$ autrement dit

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ décroît.}}$$

Par théorème de convergence monotone, il s'ensuit que $(x_n)_n$ converge.

On a $f_2(x) = -1 + x + x^2$ donc l'unique racine positive est $\varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$ d'où $x_n \leq \varphi$ pour tout $n \geq 2$ puis

$$f_n(x_n) = 0 \iff -1 + \sum_{k=1}^n x_n^k = 0 \iff -1 + x_n \frac{1 - x_n^n}{1 - x_n} = 0 \iff x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_n^{n+1}}{2}$$

Comme $0 \leq x_n \leq \varphi < 1$ pour tout $n \geq 2$, il s'ensuit

$$\boxed{x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}}$$

Remarque : En montrant que $(x_n)_{n \geq 1}$ décroît strictement puisque $f_n < f_{n+1}$ sur $]0; +\infty[$ pour tout n entier non nul, on a $x_n < x_1 = 1$ pour tout $n \geq 2$ ce qui évite de résoudre $f_2(x) = 0$.

Exercice 41 (***)

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans \mathbb{U} deux à deux distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ dans \mathbb{C}^* . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^n$$

Montrer

$$u_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Corrigé : Supposons $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. On a pour n entier

$$\forall k \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket \quad u_{n+k} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^k \times \lambda_i^n$$

d'où

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+r-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \dots & \alpha_r \\ \alpha_1 \lambda_1 & \dots & \dots & \alpha_r \lambda_r \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1 \lambda_1^{r-1} & \dots & \dots & \alpha_r \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_r^n \end{pmatrix}$$

et

$$\det A = \left(\prod_{i=1}^r \alpha_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_r^n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+r-1} \end{pmatrix}$$

Chaque λ_k^n est combinaison linéaire de suites de limites nulles puisque $u_{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; r-1 \rrbracket$ et il s'ensuit

$$\forall k \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \lambda_k^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ce qui est absurde puisque $\lambda_k \in \mathbb{U}$ pour tout $k \in \llbracket 1; r \rrbracket$. On conclut

$$\boxed{u_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Exercice 42 (***)

Soit $z \in \mathbb{U}$. Montrer qu'il existe une suite extraite de suite $(z^n)_n$ qui tend vers 1.

Corrigé : On appelle *extractrice* une injection strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . La suite

$(z^n)_n$ est à valeurs dans \mathbb{U} partie bornée de \mathbb{C} . D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose de φ extractrice telle que $(z^{\varphi(n)})_n$ converge et par continuité du module, on a

$$z^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{i\theta} \quad \text{avec } \theta \text{ réel}$$

On définit $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par $\psi(0) = \varphi(0)$ puis $\psi(n+1) = \varphi(2\psi(n) + 1)$ pour n entier. Avec ce choix, on observe

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \psi(n+2) - \psi(n+1) - (\psi(n+1) - \psi(n)) = \underbrace{\psi(n+2) - 2\psi(n+1) + \psi(n)}_{\geq 1} > \psi(n)$$

Ainsi, la suite $(\psi(n+1) - \psi(n))_n$ est une extractrice vérifiant $\psi(n+1) - \psi(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ avec $(\psi(n))_n$ sous-suite de $(\varphi(n))_n$. Il vient

$$z^{\psi(n+1) - \psi(n)} = z^{\psi(n+1)} \overline{z^{\psi(n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{i\theta} e^{-i\theta} = 1$$

On conclut

La suite $(z^n)_n$ admet une suite extraite qui tend vers 1.

Exercice 43 (**)

Soit la matrice J de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1.

1. Calculer J^2 .
2. En déduire que $I_n + J$ est inversible et préciser son inverse.

Corrigé : 1. On trouve

$J^2 = nJ$

2. On note $A = I_n + J$ d'où $J = A - I_n$. On a

$$A^2 = I_n + 2J + J^2 = I_n + (n+2)J = I_n + (n+2)(A - I_n) \iff A^2 - (n+2)A = (n+1)I_n$$

On conclut

La matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{n+1} (A - (n+2)I_n)$.

Exercice 44 (**)

Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = XY^\top$. Déterminer une expression simple de M^p avec p entier.

Corrigé : Par associativité du produit matriciel, il vient

$$M^2 = X(Y^\top X)Y^\top = \alpha M \quad \text{avec } \alpha = Y^\top X = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Par récurrence immédiate, on conclut

$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad M^p = \alpha^{p-1} M$

Exercice 45 (**)

Soit $V = (\omega^{(k-1)(\ell-1)})_{1 \leq k, \ell \leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n+1}}$. Calculer $V\bar{V}$. En déduire l'inversibilité de la matrice V et préciser son inverse.

Corrigé : Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2$. On a

$$(\overline{V\overline{V}})_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{n+1} \omega^{(k-1)(j-1)} \omega^{-(j-1)(\ell-1)} = \sum_{j=1}^{n+1} (\omega^{k-\ell})^{j-1}$$

C'est une somme de racines de l'unité et en distinguant les cas, on trouve

$$(\overline{V\overline{V}})_{k,\ell} = \begin{cases} n+1 & \text{si } k = \ell \\ \frac{1 - \omega^{(n+1)(k-\ell)}}{1 - \omega^{k-\ell}} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On conclut

$$\boxed{V\overline{V} = (n+1)I_{n+1}}$$

Exercice 46 (*)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg } M = 1$. Montrer qu'il existe X et Y des matrices colonnes non nulles telles que $M = XY^T$.

Corrigé : Il existe une colonne X de M non nulle. Toutes les autres colonnes de M sont colinéaires à celle-ci d'où $M = (y_1 X | \dots | y_n X) = XY^T$ avec Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \neq 0$ puisque l'un des y_j vaut 1. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } X \text{ et } Y \text{ des matrices colonnes non nulles telles que } M = XY^T.}$$

Exercice 47 (**)

Soit n entier non nul. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *nilpotente* s'il existe p entier non nul tel que $M^p = 0$. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec B nilpotente et $AB = BA$. Montrer

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

Corrigé : On suppose $A = I_n$. Soit p entier non nul tel que $B^p = 0$. D'après la factorisation de Bernoulli, on a

$$I_n = I_n^p - (-B)^p = (I_n + B) \sum_{k=0}^{p-1} B^k$$

ce qui prouve l'inversibilité de $I_n + B$. Supposons $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. On a

$$A + B = A(I_n + B') \quad \text{avec } B' = A^{-1}B$$

On a $AB = BA$ d'où $A^{-1}B = BA^{-1}$ et il s'ensuit $(A^{-1}B)^p = A^{-p}B^p = 0$. Ainsi, d'après le premier résultat, on a $I_n + B' \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ d'où $A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Supposons $A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. D'après le sens direct, on a $A = A + B + (-B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et on conclut

$$\boxed{A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff A + B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

Exercice 48 (**)

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

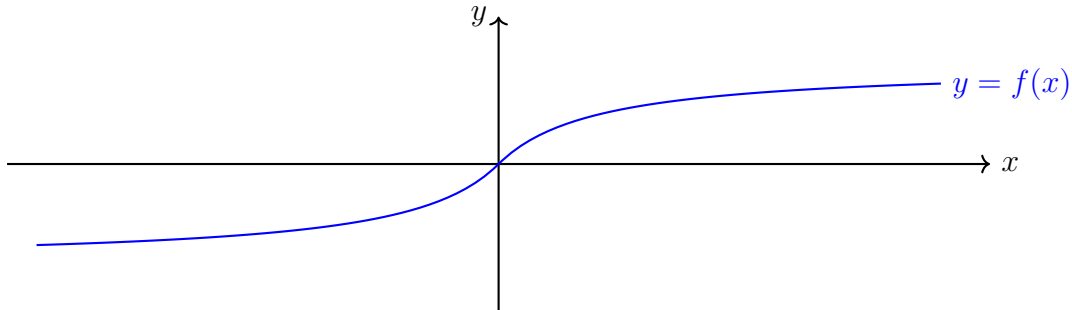
1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1 ; 1 [$.
2. Expliciter la réciproque f^{-1} .

Corrigé : 1. Pour x réel, on a clairement $|f(x)| < 1$. Puis

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad \forall x \leq 0 \quad f(x) = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$$

On en déduit que f croît strictement sur \mathbb{R} avec $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$. Par conséquent

L'application f réalise une bijection de \mathbb{R} sur $] -1 ; 1 [$.



2. Soit x réel et $y \in] -1 ; 1 [$. On résout

$$y = f(x) \iff y = \frac{x}{1+|x|} \iff \begin{cases} x = (1+|x|)y \\ |x|(1-|y|) = |y| \end{cases} \iff x = \frac{y}{1-|y|}$$

$$\forall y \in] -1 ; 1 [\quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$$

Exercice 49 (***)

Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer

$$f \text{ bijective} \iff \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$$

Corrigé : Montrons le sens indirect. Pour $A = \emptyset$, on obtient $f(E) = F$ d'où f surjective. Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \neq y$. On a $f(y) \in f(E \setminus \{x\}) = F \setminus \{f(x)\}$ d'où $f(y) \neq f(x)$. Supposons f bijective. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $y \in f(E \setminus A)$. On a $y = f(x)$ avec $x \notin A$. Si $f(x) \in f(A)$, alors $f(x) = f(a)$ avec $a \in A$ et l'injectivité de f implique $x = a \in A$ ce qui est exclu. Par suite, on a $f(x) \in F \setminus f(A)$. Soit $f \in F \setminus f(A)$. Par surjectivité, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $f(x) \notin f(A)$, il s'ensuit que $x \notin A$ d'où $x \in f(E \setminus A)$. On conclut

$$f \text{ bijective} \iff \forall A \in \mathcal{P}(E) \quad f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$$

Exercice 50 (***)

On définit $\pi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ par

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$$

1. Justifier que π est définie de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N} .

2. Montrer

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n+1) = \pi(m+1, n) + 1 \quad \text{et} \quad \pi(n+1, 0) = \pi(0, n) + 1$$

En déduire que π est surjective.

3. Montrer

$$\forall (m, n, m', n') \in \mathbb{N}^4 \quad m' + n' \geq m + n + 1 \implies \pi(m', n') > \pi(m, n)$$

En déduire l'injectivité de π .

Corrigé : 1. Les entiers $m + n$ et $m + n + 1$ sont consécutifs donc l'un d'eux est pair et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } \pi \text{ est bien définie de } \mathbb{N}^2 \text{ sur } \mathbb{N}.}$$

Variante : On observe que

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \pi(m, n) = n + \sum_{k=1}^{m+n} k \in \mathbb{N}$$

2. On a $\pi(0, 0) = 0$ d'où $0 \in \text{Im } \pi$. On vérifie sans peine les relations demandées. Puis, pour $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on observe

$$\pi(m, n) + 1 = \begin{cases} \pi(n + 1, 0) & \text{si } m = 0 \\ \pi(m - 1, n + 1) & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où $\pi(m, n) + 1 \in \text{Im } \pi$. Ainsi, l'ensemble $\text{Im } \pi$ est une partie de \mathbb{N} contenant 0 et qui vérifie le principe de récurrence et on conclut

$$\boxed{\text{Im } \pi = \mathbb{N}}$$

3. Soient (m, n) et (m', n') dans \mathbb{N}^2 avec $(m, n) \neq (m', n')$. Si $m' + n' \geq m + n + 1$, il vient

$$\begin{aligned} \pi(m', n') &= \frac{(m' + n')(m' + n' + 1)}{2} + n' \geq \frac{(m + n + 1)(m + n + 2)}{2} + n' \\ &\geq \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} + n + m + 1 + n' > \pi(m, n) \end{aligned}$$

c'est-à-dire $m' + n' > m + n \implies \pi(m', n') > \pi(m, n)$

Par symétrie des rôles, on en déduit

$$m + n \neq m' + n' \implies \pi(m, n) \neq \pi(m', n')$$

Supposons $(m, n) \neq (m', n')$. Si $m + n = m' + n'$, alors $n \neq n'$ d'où $\pi(m, n) \neq \pi(m', n')$ et sinon on a également $\pi(m', n') \neq \pi(m, n)$ d'après l'implication précédente. Dans tous les cas, on a donc

$$(m, n) \neq (m', n') \implies \pi(m, n) \neq \pi(m', n')$$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'application } \pi \text{ est une injection de } \mathbb{N}^2 \text{ sur } \mathbb{N}.}$$

Variante : Pour montrer l'inégalité demandée, on peut aussi écrire

$$\pi(m', n') = n' + \sum_{k=1}^{m'+n'} k \geq n' + \sum_{k=1}^{m+n+1} k = m + 1 + n' + n + \sum_{k=1}^{m+n} k = m + 1 + n' + \pi(m, n)$$

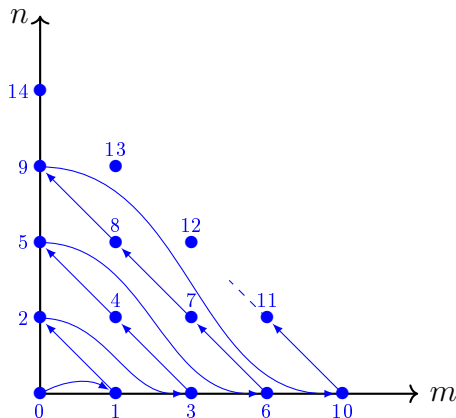


FIGURE 3 – Parcours de \mathbb{N}^2 par π

Exercice 51 (*)

Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad 5 \text{ divise } 2^{3n+5} + 3^{n+1}$

Corrigé : Soit n entier. On a

$$2^{3n+5} + 3^{n+1} \equiv 2^5(2^3)^n + 3^{n+1} \equiv 2 \times 3^n + 3 \times 3^n \equiv 0 \pmod{5}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad 5 \text{ divise } 2^{3n+5} + 3^{n+1}}$$

Exercice 52 (**)

Pour n entier non nul, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n . Établir l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d=1}^n \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

Corrigé : Soit n entier non nul. On a

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{d|k} 1 \right)$$

Comme les sommes sont finies, on peut intervertir l'ordre de sommation. Le plus grand diviseur de n étant n lui-même, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d=1}^n \left(\sum_{k \in [1; n], d|k} 1 \right)$$

La somme intérieure ci-dessus compte le nombre de multiples de d dans $[1; n]$ qui sont

$$d, 2d, \dots, \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor d$$

Par conséquent

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{d=1}^n \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}$$

Variante rédactionnelle

$$\sum_{k=1}^n \tau(k) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathbf{1}_{\mathcal{D}_k}(\ell) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\mathcal{D}_k}(\ell)$$

Exercice 53 (**)

Soient a et p des entiers supérieurs à 2.

Montrer que si $a^p - 1$ est premier, alors $a = 2$ et p est premier.

Corrigé : Supposons $p = q\ell$ avec q et ℓ des entiers ≥ 2 . D'après l'identité de Bernoulli, il vient

$$a^p - 1 = (a^q)^\ell - 1 = (a^q - 1) \sum_{k=0}^{\ell-1} a^{qk}$$

ce qui contredit la primalité de $a^p - 1$. on en déduit que p est premier. Puis, on factorise

$$a^p - 1 = (a - 1) \sum_{k=0}^{p-1} a^k$$

On a $a - 1 < a^p - 1$ et comme $a^p - 1$ est premier, il s'ensuit $a - 1 = 1$ et on conclut

$$\boxed{a^p - 1 \text{ premier} \implies a = 2 \text{ et } p \text{ premier}}$$

Remarque : Les nombres premiers de la forme $2^p - 1$ sont appelés *nombres premiers de Mersenne*.

Exercice 54 (**)

Soient a, b dans \mathbb{Z} . Établir l'égalité $(a \wedge b)(a \vee b) = ab$ sans utiliser la décomposition de a et b en facteurs premiers.

Corrigé : L'égalité a clairement lieu si a ou b est nul. On suppose a et b non nuls. On note $d = a \wedge b$. On dispose de a', b' dans \mathbb{Z} , premiers entre eux tels que $a = a'd, b = b'd$ avec $a' \wedge b' = 1$. On pose $c = a'b'd$. On a $a|c$ et $b|c$ d'où $a \vee b|c$. Puis, on dispose de k, ℓ dans \mathbb{Z} tels que

$$a \vee b = ak = a'dk \quad \text{et} \quad a \vee b = b\ell = b'd\ell$$

et de u et v dans \mathbb{Z} tels que $a'u + b'v = 1$. Ainsi, il vient

$$a \vee b = (a \vee b)(a'u + b'v) = b'dla'u + a'dkb'v = c(\ell u + kv)$$

ce qui prouve $c|a \vee b$. Par conséquent, les entiers $a \vee b$ et c sont associés et unitaires donc égaux.

Ainsi, on obtient

$$(a \wedge b)(a \vee b) = dc = da'b'd$$

On conclut

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad (a \wedge b)(a \vee b) = ab}$$

Exercice 55 (*)

Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\text{Arctan}(x)} - \frac{2x}{\pi}$$

Corrigé : Soit $x > 0$. On a

$$\frac{x}{\text{Arctan}(x)} - \frac{2x}{\pi} = x \frac{\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)}{\frac{\pi}{2} \text{Arctan}(x)} = \frac{x \text{Arctan}(1/x)}{\frac{\pi}{2} \text{Arctan}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\pi/2)^2}$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{x}{\text{Arctan}(x)} - \frac{2x}{\pi} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi^2}}$$

Exercice 56 (***)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b réels pour que $f : t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$ ait une limite en $+\infty$.

Corrigé : Soient a, b réels non tous nuls et t réel. On a

$$a \cos(t) + b \sin(t) = \sqrt{a^2 + b^2} [\alpha \cos(t) + \beta \sin(t)] \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Comme $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe θ réel tel que $\alpha = \cos(\theta)$ et $\beta = \sin(\theta)$. Ainsi

$$a \cos(t) + b \sin(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \theta)$$

Si a, b sont non tous nuls, avec l'expression précédemment obtenue, comme la fonction \cos n'admet pas de limite en $+\infty$, alors la fonction f non plus. On conclut

La fonction f admet une limite en $+\infty$ si et seulement si $a = b = 0$.

Exercice 57 (**)

Soit n entier non nul. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)]$.

Corrigé : Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)] &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left[\ln x + \ln \left(1 + \frac{k+1}{x} \right) - \ln(k+1) \right] \\ &= (\ln x)(1-1)^n + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\ln \left(1 + \frac{k+1}{x} \right) - \ln(k+1) \right) \end{aligned}$$

On conclut $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} [\ln(x+k+1) - \ln(k+1)] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \ln(k+1)$

Exercice 58 (**)

Trouver toutes les application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues en zéro vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(2x) = f(x)$$

Corrigé : Par récurrence immédiate, on montre

$$\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

et par continuité de f en zéro $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0)$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0)$$

Exercice 59 (***)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) - f(y)| = |x - y|$

2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) + f(y)| = |x + y|$

Corrigé : 1. Notons $a = f(0)$. Il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) - a| = |x|$$

La fonction f est continue sur \mathbb{R} car 1-lipschitzienne d'où $x \mapsto |f(x) - a|$ de signe constant sur \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- . Par conséquent, la fonction $f - a$ est soit id , soit $-\text{id}$, soit $x \mapsto |x|$, soit $x \mapsto -|x|$. La condition sur f impose que celle-ci soit injective et donc $f - a$ également. Ainsi,

$$f = a + \text{id} \quad \text{ou} \quad f = a - \text{id} \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}$$

Réciproquement, de telles fonctions sont clairement solutions.

Les fonctions solutions sont de la forme $a + \text{id}$ ou $a - \text{id}$ avec a réel.

2. Pour $y = -x$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x) + f(-x)| = 0$

Ainsi, la fonction f est impaire et par suite, en prenant $-y$ pour y , il vient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x) + f(-y)| = |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

La fonction f est donc solution de l'équation de la première question. Comme f est impaire, on a également $f(0) = 0$ d'où $f = \text{id}$ ou $-\text{id}$. Réciproquement, de telles fonctions sont solutions.

Ainsi

Les fonctions solutions sont id et $-\text{id}$.

Exercice 60 (***)

On pose $\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0; 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Justifier que la fonction f est continue sur $[0; 1]$.
2. La fonction $g : x \in [0; 1] \mapsto \lfloor f(x) \rfloor$ est-elle continue par morceaux sur $[0; 1]$?

Corrigé : 1. La fonction f est continue sur $]0; 1]$ comme composée de telles fonctions et on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)O(1) \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi

$$f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$$

2. La fonction g est bien définie sur $[0; 1]$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{(2k+1)\pi}; \frac{1}{2k\pi} \right] \\ -1 & \text{si } x \in \left] \frac{1}{2(k+1)\pi}; \frac{1}{(2k+1)\pi} \right[\end{cases}$$

Ainsi, la fonction g admet une infinité de discontinuités sur le segment $[0; 1]$.

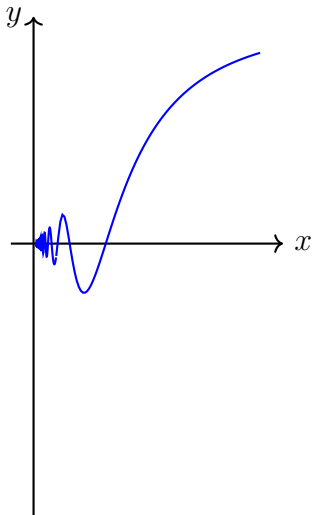


FIGURE 4 – Graphe $y = f(x)$

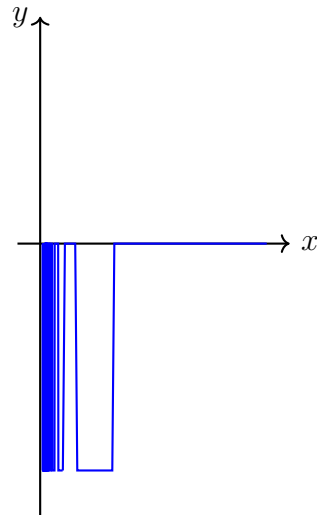


FIGURE 5 – Graphe $y = g(x)$

Il n'existe donc pas de subdivision de $[0; 1]$ adaptée à g et on conclut

$$g \notin \mathcal{C}_{pm}([0; 1], \mathbb{R})$$

Remarque : Cet exemple illustre le fait que la composée d'une fonction continue par morceaux avec une fonction continue n'est pas nécessairement continue par morceaux.

Exercice 61 (*)

Soit (G, \times) un groupe et $Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G \quad xg = gx\}$ son *centre*. Soit φ un morphisme surjectif de G sur G . Montrer

$$\varphi(Z(G)) \subset Z(G)$$

Corrigé : Soit $x \in Z(G)$ et $y \in G$. Par surjectivité de φ , il existe $g \in G$ tel que $y = \varphi(g)$ d'où

$$\varphi(x)y = \varphi(x)\varphi(g) = \varphi(xg) = \varphi(gx) = \varphi(g)\varphi(x) = y\varphi(x)$$

Autrement dit $\forall x \in Z(G) \quad \varphi(x) \in Z(G)$

Ainsi

$$\varphi(Z(G)) \subset Z(G)$$

Exercice 62 (**)

Soit (G, \star) un groupe.

1. Montrer qu'une union de deux sous-groupes de (G, \star) est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.
2. Le résultat se généralise-t-il à plus de deux sous-groupes ?

Corrigé : 1. Soit G un groupe et H_1, H_2 deux sous-groupes. Supposons qu'il existe $a \in H_1 \setminus H_2$. Soit $b \in H_2$. On a $a \star b \in H_1 \cup H_2$, autrement dit $a \star b \in H_1$ ou $a \star b \in H_2$. Si $a \star b \in H_2$, alors $(a \star b) \star b^{-1} = a \in H_2$ ce qui est exclu. Il s'ensuit que $a \star b \in H_1$ et par suite $a^{-1} \star (a \star b) = b \in H_1$ ce qui prouve $H_2 \subset H_1$. Si un tel a n'existe pas, alors $H_1 \subset H_2$. On conclut

Une union de deux sous-groupes est un sous-groupe si et seulement si l'un contient l'autre.

2. En fait, non ! On a pour la loi multiplicative

$$(\pm 1, \pm 1) = (\pm 1, 1) \cup (1, \pm 1) \cup \pm(1, 1)$$

et aucun des sous-groupes exhibés ne contient les autres. Ainsi

Le résultat ne se généralise pas à plus de deux sous-groupes.

Remarques : (a) Si on connaît les groupes quotients, on peut considérer :

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle(1, 0)\rangle \cup \langle(0, 1)\rangle \cup \langle(1, 1)\rangle$$

(b) Il faut chercher un contre-exemple de groupe qui ne soit pas cyclique car un sous-groupe contenant un générateur serait le groupe lui-même.

Exercice 63 (**)

On note $A = \left\{ \frac{m}{2^n}, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$

1. Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau.
2. Déterminer $U(A)$.

Corrigé : 1. On a $1 = \frac{1}{2^0} \in \mathbb{D}$. Pour $(x, y) \in \mathbb{D}^2$, on a $x = \frac{p}{2^n}$ et $y = \frac{q}{2^m}$ avec $(p, q, n, m) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N}^2$ puis

$$x - y = \frac{p}{2^n} - \frac{q}{2^m} = \frac{2^m p - 2^n q}{2^{n+m}} \in A \quad \text{et} \quad xy = \frac{p}{2^n} \frac{q}{2^m} = \frac{pq}{2^{n+m}} \in A$$

Ainsi

L'ensemble A est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.

2. Un élément de $U(A)$ s'écrit $\frac{p}{2^n}$ et il existe q et m entiers tels que $\frac{pq}{2^{n+m}} = 1$. Ainsi, on a $pq = 2^{n+m}$ d'où $p|2^{n+m}$ et par conséquent

$$U(A) \subset \{(-1)^\varepsilon 2^r, (\varepsilon, r) \in \{0, 1\} \times \mathbb{Z}\}$$

L'inclusion réciproque est immédiate. On conclut

$$U(A) = \{(-1)^\varepsilon 2^r, (\varepsilon, r) \in \{0, 1\} \times \mathbb{Z}\}$$

Exercice 64 (*)

Justifier les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin(x)| \leq |x| \quad |\text{Arctan}(x)| \leq |x|$$

Corrigé : Les fonctions \sin et Arctan sont dérivable sur \mathbb{R} avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin'(x) = \cos(x) \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin'(x)| \leq 1 \quad |\text{Arctan}'(x)| \leq 1$

D'après l'inégalité des accroissements finis, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin(x) - \sin(0)| \leq |x - 0| \quad |\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)| \leq |x - 0|$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin(x)| \leq |x| \quad |\text{Arctan}(x)| \leq |x|$$

Exercice 65 (*)

En considérant la dérivée n -ième de l'application polynomiale $x \mapsto x^{2n}$, déterminer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Corrigé : Notons $f(x) = x^n$ pour x réel. Une récurrence immédiate donne

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Par dérivation en considérant directement f^2 puis $f \times f$ avec la formule de Leibniz, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f^2)^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{n!} x^n \quad \text{et} \quad (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f^2)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k = n! x^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Par identification

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}}$$

Remarque : C'est un cas particulier de la formule de Vandermonde.

Exercice 66 (**)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k + (-1)^k}{n^3}\right)$

Corrigé : D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|\sin u| \leq |u|$ pour u réel. Ainsi, conjuguée avec l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k + (-1)^k}{n^3}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \sin\left(\frac{k + (-1)^k}{n^3}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{n^3} \leq \frac{n(n+1)}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k + (-1)^k}{n^3}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Exercice 67 (**)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}$ pour n entier.

Corrigé : Posons $f(x) = \frac{1}{2+x}$ pour $x \geq 0$. On a $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ d'où $u_n \geq 0$ pour tout n entier par récurrence immédiate. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \geq 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} \implies \sup_{x \geq 0} |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est k -contractante avec $k \in]0; 1[$. On a pour $x \geq 0$

$$f(x) = x \iff x^2 + 2x = 1 \iff (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) = 0 \iff x = \sqrt{2} - 1$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right| \leq k^n \left| u_0 - (\sqrt{2} - 1) \right|$$

On conclut

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sqrt{2} - 1}$$

Remarque : La fonction f décroît donc on peut aussi considérer les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ qui sont monotones et vérifier leur convergence.

Exercice 68 (*)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples avec $\deg P > 1$. Montrer que P' est également scindé à racines simples.

Corrigé : Notons $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ les racines de P . D'après le théorème de Rolle, il existe $\beta_k \in]\alpha_k; \alpha_{k+1}[$ pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ (on a $n-1 \geq 1$) et par suite

$$\boxed{\text{Le polynôme } P' \text{ est scindé à racines simples.}}$$

Exercice 69 (***)

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = \varphi(x)\varphi(1-x) \quad \theta(x) = \frac{\int_0^x \psi(t) dt}{\int_0^1 \psi(t) dt}$

1. Justifier que la fonction φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0; +\infty[$ et que pour tout entier n , il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x > 0 \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(x)$$

2. En déduire que la fonction φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
3. Représenter les graphes des fonctions ψ et θ .
4. Montrer qu'il existe une fonction $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$0 \leq \eta \leq 1 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \quad \eta(x) = 1 \quad \forall x \notin]-1; 1[\quad \eta(x) = 0$$

Corrigé : 1. La fonction φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* d'après les théorèmes généraux. Pour n entier, on note

$$\mathcal{P}(n) : \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \mid \forall x > 0 \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(x)$$

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour n entier. Il vient par dérivation

$$\forall x > 0 \quad \varphi^{(n+1)}(x) = \frac{1}{x^2} \left(-P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

On pose $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n')$ et l'hérédité est démontrée. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists P_n \in \mathbb{R}[X] \mid \forall x > 0 \quad \varphi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\varphi(x)}$$

2. On a $\varphi(0) = 0$. Pour n entier, on suppose $\varphi^{(n)}$ dérivable en 0 avec $\varphi^{(n)}(0) = 0$. Il vient par croissances comparées

$$\forall x > 0 \quad \frac{\varphi^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{1}{x} P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

et le résultat vaut également pour la dérivée à gauche en 0. Par récurrence, on a donc montré que la fonction φ est dérivable à tout ordre en zéro et on conclut

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

3. La fonction ψ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} comme composée de telles fonctions. Pour $x < 0$, on a $\varphi(x) = 0$ et pour $x > 1$, on a $1 - x < 0$ d'où $\varphi(1 - x) = 0$ et par conséquent

$$\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\quad \psi(x) = 0$$

On observe

$$\forall x \in [0; 1] \quad \psi(1 - x) = \psi(x)$$

ce qui prouve que le graphe de ψ est symétrique par rapport à l'axe d'équation $x = \frac{1}{2}$. Enfin, on a par dérivation

$$\forall x \in [0; 1] \quad \psi'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1-x)^2} \right) \psi(x) = \frac{1-2x}{(x(1-x))^2} \psi(x)$$

d'où la croissance de ψ sur $[0; 1/2]$. On en déduit l'allure suivante :

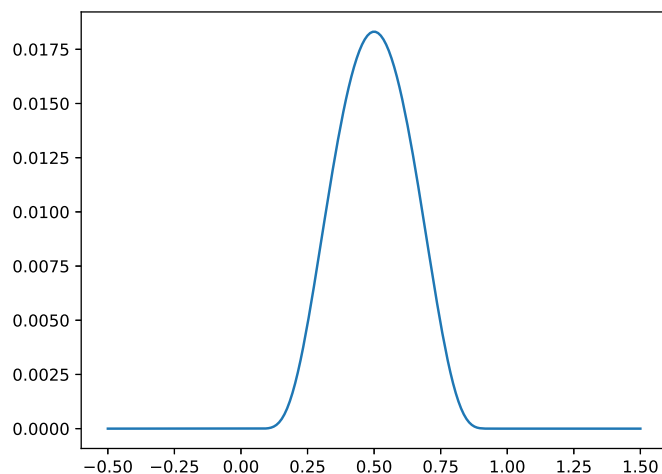


FIGURE 6 – Graphe de ψ

D'après le théorème fondamental d'intégration, la fonction θ est également de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Sans difficulté, on a $\theta(x) = 0$ pour $x < 0$. La fonction ψ est positive et par conséquent la fonction θ croît avec une croissance stricte sur $[0; 1]$ puisqu'on a

$$\forall x \in [0; 1] \quad \theta'(x) = \frac{1}{\int_0^1 \psi(t) dt} \psi(x) > 0$$

Enfin, observe que pour tout $x \geq 1$, on a par relation de Chasles

$$\theta(x) = \frac{1}{\int_0^1 \psi(t) dt} \left(\int_0^1 \psi(t) dt + \underbrace{\int_1^x \psi(t) dt}_{=0} \right) = 1$$

On en déduit l'allure suivante :

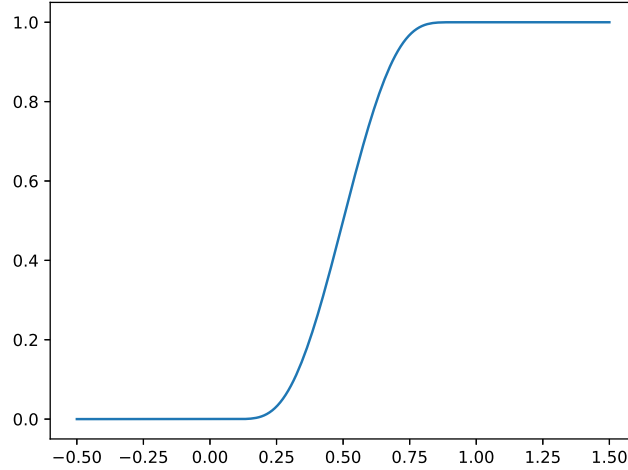


FIGURE 7 – Graphe de θ

4. D'après ce qui précède, la fonction θ est à valeurs dans $[0; 1]$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \eta(x) = \theta(2(1+x))\theta(2(1-x))$$

La fonction η est à valeurs dans $[0; 1]$ par construction. Pour $x > 1$, on a $2(1-x) < 0$ d'où $\eta(x) = 0$ puis pour $x < -1$, on a $2(1+x) < 0$ d'où $\eta(x) = 0$. Enfin, pour $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, on a $2(1+x) \geq 1$ et $2(1-x) \geq 1$ d'où $\eta(x) = 1$. On conclut

La fonction η proposée vérifie les conditions attendues.

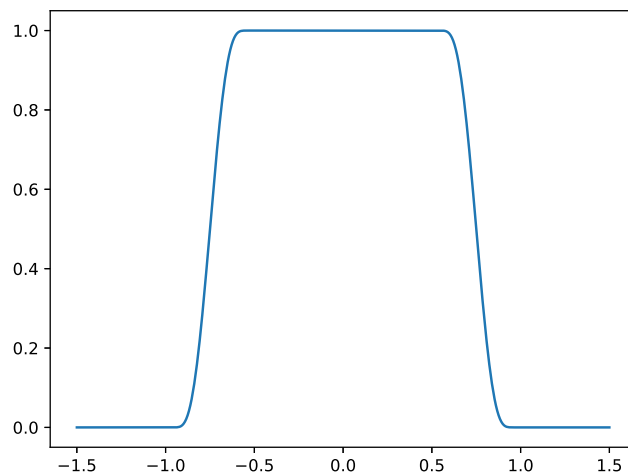


FIGURE 8 – Graphe de η

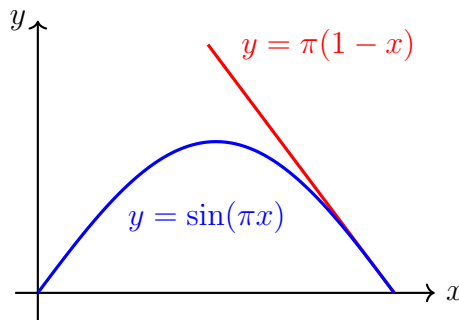
Remarque : La fonction η est appelée *fonction plateau*. Ce type de fonctions est très utile en analyse, en particulier en théorie des distributions. On les utilise notamment pour effectuer de la localisation au voisinage d'un point d'intérêt.

Exercice 70 (*)

Établir $\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)$

Corrigé : La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ est concave sur $[0; 1]$ puisqu'elle est dérivable de dérivée $x \mapsto \pi \cos(\pi x)$ décroissante sur $[0; 1]$. Ainsi, sa tangente en 1 est au dessus du graphe d'où

$$\boxed{\forall x \in [0; 1] \quad \sin(\pi x) \leq \pi(1 - x)}$$



Exercice 71 (*)

Soient $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Montrer $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$

Corrigé : La fonction $\sqrt{\cdot}$ est concave sur \mathbb{R}_+ . D'après l'inégalité de Jensen, il vient

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

On conclut

$$\boxed{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$$

Exercice 72 ()**

Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer $\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$
2. Montrer que pour tout n entier et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ réels positifs, on a

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \sum_{k=1}^n b_k^q$$

Corrigé : 1. Soient $a, b > 0$. Par concavité de \ln , on a

$$\frac{1}{p} \ln a + \frac{1}{q} \ln b \leq \ln \left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \right)$$

D'où

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \quad a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

Remarque : L'inégalité est trivialement vraie si a ou b est nul.

2. Si les a_k ou les b_k sont tous nuls, le résultat est trivial. On suppose les a_k et les b_k non tous nuls. On pose

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \alpha_k = \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} \quad \beta_k = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

D'après le résultat de la première question, on a

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sqrt[p]{\alpha_k} \sqrt[q]{\beta_k} \leq \frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{q}$$

Par sommation, il vient

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[p]{\alpha_k} \sqrt[q]{\beta_k} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

D'où l'inégalité de Hölder

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n a_k^p} \sqrt[q]{\sum_{k=1}^n b_k^q}$$

Exercice 73 (**)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.
2. En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

Corrigé : 1. Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a

$$P \circ P - P = \sum_{k=0}^n a_k (P - X + X)^k - P = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (P - X)^\ell X^{k-\ell} - P$$

puis

$$\begin{aligned} P \circ P - P &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} (P - X)^\ell X^{k-\ell} + \sum_{k=0}^n a_k \binom{k}{0} (P - X)^0 X^k - P \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \sum_{\ell=1}^k \binom{k}{\ell} (P - X)^\ell X^{k-\ell} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{P - X \text{ divise } P \circ P - P}$$

Variante : On note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a

$$P \circ P - P = \sum_{k=0}^n a_k [P^k - X^k] = \sum_{k=0}^n a_k (P - X) \sum_{i=0}^{k-1} P^i X^{k-i}$$

2. On a

$$P \circ P - X = P \circ P - P + P - X$$

D'après le résultat précédent, on conclut

$$\boxed{P - X \text{ divise } P \circ P - X}$$

Exercice 74 (**)

Soit $X \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \quad P(x) = \sqrt[3]{x}$$

Corrigé : Notons $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à X . On a $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$. On choisit alors $P = \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{x_i} L_i$. On a

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad P(x_j) = \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{x_i} L_i(x_j) = \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{x_i} \delta_{i,j} = \sqrt[3]{x_j}$$

Exercice 75 (**)

Soit n entier et θ réel. Établir

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)) \quad \text{avec} \quad T_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$$

Corrigé : Soit n entier et θ réel. On a

$$\cos(n\theta) = \operatorname{Re} (e^{i\theta})^n = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (i \sin(\theta))^k (\cos(\theta))^{n-k} = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (\cos(\theta)^2 - 1)^k \cos(\theta)^{n-2k}$$

On conclut

$$\forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

Remarque : Les polynômes $(T_n)_n$ sont appelés *polynômes de Tchebychev de première espèce*.

Exercice 76 (**)

Soit $(P_n)_n$ suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$P_0 = 2, \quad P_1 = X \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

1. Calculer P_2, P_3 .
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
3. Montrer que pour tout $(n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^*$ $P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$.
4. En déduire une expression simple de $P_n(2 \cos(\theta))$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
5. Déterminer les racines de P_n .

Corrigé :

1. Le calcul donne

$$P_2 = X^2 - 2 \quad \text{et} \quad P_3 = X^3 - 3X$$

2. On peut aisément conjecturer

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = X^n + Q_n \quad \text{avec} \quad Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Montrons cette propriété par récurrence double. Notons :

$$\mathcal{P}(n) : P_n = X^n + Q_n \quad \text{avec} \quad Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

- Les propriétés $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont clairement vraies.
- $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)$: On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour n entier non nul fixé. On a

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= XP_{n+1} - P_n = X(X^{n+1} + Q_{n+1}) - P_n \\ &= X^{n+2} + Q_{n+2} \end{aligned}$$

avec

$$Q_{n+2} = XQ_{n+1} - P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$$

ce qui clôt la récurrence. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = X^n + Q_n \quad \text{avec} \quad Q_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

3. On procède là encore par récurrence double. Notons

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \quad P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n$$

- La vérification de $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ est immédiate.
- $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)$: On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies pour n entier fixé. On a

$$\begin{aligned} P_{n+2}(z + 1/z) &= (z + 1/z)P_{n+1}(z + 1/z) - P_n(z + 1/z) \\ &= (z + 1/z)(z^{n+1} + 1/z^{n+1}) - (z^n + 1/z^n) = z^{n+2} + 1/z^{n+2} \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence. Par conséquent

$$\boxed{\forall (n, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{C}^* \quad P_n(z + 1/z) = z^n + 1/z^n}$$

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après l'identité d'Euler, on a $2 \cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$. Par suite, il vient

$$P_n(2 \cos(\theta)) = P_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$$

On en déduit

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta)}$$

5. A l'aide de la question précédente, déterminons les racines de P_n . Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$P_n(2 \cos(\theta)) = 0 \iff 2 \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

L'application $\theta \mapsto 2 \cos(\theta)$ est strictement décroissante sur $[0; \pi]$ donc injective sur cet intervalle.

Comme on a
$$0 < \frac{\pi}{2n} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n} = \pi - \frac{\pi}{2n} < \pi$$

on en déduit
$$\text{Card} \left\{ 2 \cos \left\{ \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \right\}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\} = n$$

Comme P_n est un polynôme de degré n , il admet au plus n racines et on a donc déterminé exactement toutes ses racines. Le coefficient dominant de P_n étant égal à 1, on en déduit la forme factorisée

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n(X) = \prod_{k=1}^n \left(X - 2 \cos \left[\pi \left(\frac{2k-1}{2n} \right) \right] \right)}$$

Exercice 77 (***)

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Corrigé : Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ avec $a_n \neq 0$ tel que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. On a

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P(e^{i\theta}) \overline{P(e^{i\theta})} = 1$$

On pose
$$\widehat{P} = \sum_{k=0}^n \overline{a_{n-k}} X^k$$

On a $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \widehat{P}(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^n \overline{a_{n-k}} e^{ik\theta} = e^{in\theta} \sum_{k=0}^n \overline{a_{n-k}} e^{-i(n-k)\theta} = e^{in\theta} \overline{P(e^{i\theta})}$

Ainsi $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad (P\widehat{P})(e^{i\theta}) = e^{in\theta}$

ce qui prouve que le polynôme $P\widehat{P} - X^n$ admet une infinité de racines et est donc le polynôme nul. On en déduit que P divise X^n et comme $n = \deg P$, il vient $P = \alpha X^n$ avec $\alpha = P(1) \in \mathbb{U}$. La réciproque est immédiate et on conclut

$$\boxed{\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}\} = \{\alpha X^n, (\alpha, n) \in \mathbb{U} \times \mathbb{N}\}}$$

Exercice 78 (*)

Soit n entier non nul, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $H = \{M \in E \mid \text{Tr}(M) = 0\}$. Montrer que $E = H \oplus \text{Vect}(I_n)$.

Corrigé : On procède par analyse/synthèse. Soit $M \in E$. Supposons qu'il existe $A \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $M = A + \alpha I_n$. Il s'ensuit $\text{Tr}(M) = n\alpha$ d'où

$$\alpha = \frac{1}{n} \text{Tr}(M) \quad \text{et} \quad A = M - \frac{1}{n} \text{Tr}(M) I_n$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence. On vérifie sans difficulté que cette solution convient et on conclut

$$\boxed{E = H \oplus \text{Vect}(I_n)}$$

Exercice 79 (**)

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour λ réel, on note $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de E .

Corrigé : Soient des réels strictement ordonnés $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{\lambda_i} = 0$. Supposons les α_i non tous nuls. On pose $k = \max\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \alpha_i \neq 0\}$. On a

$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^k \alpha_i f_{\lambda_i}$ avec $\alpha_k \neq 0$. Par factorisation, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 0 = \alpha_k + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i e^{(\lambda_i - \lambda_k)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \alpha_k = 0$$

ce qui est contradictoire. On en déduit que les α_i sont tous nuls autrement dit

$$\boxed{\text{La famille } (f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{ est libre.}}$$

Exercice 80 (***)

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et on note $u_i = (1, a_i, \dots, a_i^n)$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer

$$(u_0, \dots, u_n) \text{ libre} \iff \text{Card}\{a_0, \dots, a_n\} = n + 1$$

Corrigé : Si $\text{Card}\{a_0, \dots, a_n\} < n + 1$, alors il existe $a_i = a_j$ avec $i \neq j$ et par suite $u_i = u_j$ ce qui implique (u_0, \dots, u_n) liée, autrement dit, par contraposée

$$(u_0, \dots, u_n) \text{ libre} \implies \text{Card} \{a_0, \dots, a_n\} = n + 1$$

Supposons $\text{Card} \{a_0, \dots, a_n\} = n + 1$. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i u_i = 0$, autrement dit

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^k = 0$$

Ainsi pour $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il vient par combinaison linéaire

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i^k = 0 \iff \sum_{i=0}^n \lambda_i \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k a_i^k \right) = 0$$

Notant $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$, les α_k étant quelconques, on a donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i P(a_i) = 0$$

En considérant $P = L_k$ le k -ième polynôme interpolateur de Lagrange associé à (a_0, \dots, a_n) , on trouve exactement

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \underbrace{L_k(a_i)}_{=\delta_{i,k}} = \lambda_k = 0$$

La liberté s'ensuit et on conclut

$$\boxed{(u_0, \dots, u_n) \text{ libre} \iff \text{Card} \{a_0, \dots, a_n\} = n + 1}$$

Exercice 81 (**)

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ dont l'intersection est de cardinal 1.

Corrigé : Notons N le nombre de couples de $\mathcal{P}(E)^2$ dont l'intersection est de cardinal 1. Il y a n façons de choisir un élément a en particulier puis $\binom{n-1}{k}$ façons de choisir les éléments de $X \setminus \{a\}$ avec $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et $\binom{n-1-k}{\ell}$ façons de choisir les éléments de $Y \setminus X$ avec $\ell \in \llbracket 0; n-1-k \rrbracket$. Ainsi, on a

$$\boxed{N = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{n-1-k} n \binom{n-1}{k} \binom{n-1-k}{\ell} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{n-1-k} = n3^{n-1}}$$

Variante : Une autre approche consiste à choisir un élément a en particulier (n façons de faire ce choix), puis pour chacun des $n-1$ autres éléments, on le place soit dans $X \setminus \{a\}$, soit dans $Y \setminus \{a\}$, soit hors de $X \cup Y$. On a donc 3^{n-1} choix possibles de $(X \cup Y) \setminus \{a\}$. Pour le comptage des $n-1$ autres éléments, on peut aussi considérer que chacun est dans X ou pas, dans Y ou pas, mais pas dans X et Y ce qui fait $2^2 - 1$ choix pour chacun d'où 3^{n-1} choix possibles.

Exercice 82 (**)

On choisit 11 nombres parmi $\{1, \dots, 20\}$. Montrer qu'on en trouve au moins deux dont la somme vaut 21.

Corrigé : On considère les tiroirs $\{1, 20\}, \{2, 19\}, \dots, \{10, 11\}$. On tire 11 nombres (les chaussettes) à placer dans ces 10 tiroirs. Il y a alors au moins un tiroir qui contient 2 chaussettes, autrement dit

Il y a au moins deux nombres dont la somme vaut 21.

Exercice 83 (***)

Pour p et n entiers, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$. Par convention, on pose $\llbracket 1; 0 \rrbracket = \emptyset$.

1. Préciser $\text{Card}(\llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket})$.

2. Pour p et n entiers, établir
$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

3. Soit n entier et u_0, \dots, u_n des réels. Simplifier

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell$$

4. En déduire une formule donnant $S_{p,n}$ pour p et n entiers.

Corrigé : 1. On a

$$\text{Card}(\llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket}) = n^p$$

2. Choisir une application de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ équivaut à choisir la taille de l'ensemble image, c'est-à-dire un entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ puis les k éléments de l'image avec $\binom{n}{k}$ façons de faire ce choix et une surjection de $\llbracket 1; p \rrbracket$ sur cet ensemble image. Notant $\mathcal{S}(E, F)$ les surjections de E sur F , on a

$$\llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket} = \bigsqcup_{k=0}^n \bigsqcup_{Y \subset \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Card}(Y)=k} \mathcal{S}(\llbracket 1; p \rrbracket, Y)$$

On a $\text{Card}(\mathcal{S}(\llbracket 1; p \rrbracket, Y)) = S_{p,k}$ pour Y partie de $\llbracket 1; n \rrbracket$ à k éléments et on trouve

$$\text{Card}(\llbracket 1; n \rrbracket^{\llbracket 1; p \rrbracket}) = \sum_{k=0}^n \sum_{Y \subset \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Card}(Y)=k} S_{p,k}$$

Ainsi

$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{p,k}$$

3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell &= \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)! \ell! (k-\ell)!} u_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u_\ell \sum_{k=\ell}^n \frac{(n-\ell)!}{(n-k)! (k-\ell)!} (-1)^{n-k} \\ \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u_\ell \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{j} (-1)^{n-\ell-j} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u_\ell (1-1)^{n-\ell} \end{aligned}$$

On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell = u_n$$

Remarque : Ce procédé s'appelle *inversion de Pascal*.

4. Soient p et n entiers. Avec le résultat des questions précédentes, il vient

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \underbrace{\sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} S_{p,\ell}}_{=k^p}$$

On conclut

$$\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad S_{p,n} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

Exercice 84 (**)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe n entier non nul tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre.

Corrigé : Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) = 0_E$. On suppose les α_i non tous nuls. On pose $\ell = \min \{i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \mid \alpha_i \neq 0\}$. Il vient

$$u^{n-1-\ell} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(x_0) \right) = u^{n-1-\ell} \left(\sum_{i=\ell}^{n-1} \alpha_i u^i(x_0) \right) \alpha_\ell u^{n-1}(x_0) = 0$$

d'où la nullité de α_ℓ ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{Il existe } x_0 \in E \text{ tel que } (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)) \text{ est libre.}}$$

Exercice 85 (***)

Soit E un \mathbb{K} -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{id}$.

1. Montrer $E = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id})$
2. Montrer

$$\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Im}(f^2 + f + \text{id}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f - \text{id}) = \text{Ker}(f^2 + f + \text{id})$$

Corrigé : 1. On procède par analyse/synthèse.

• Analyse : On suppose $E = \text{Ker}(f - \text{id}) + \text{Im}(f - \text{id})$

Soit $x \in E$. Il existe $(a, b) \in \text{Ker}(f - \text{id}) \times E$ tel que $x = a + (f - \text{id})(b)$. En appliquant successivement f deux fois à cette relation, on obtient

$$\begin{cases} x = a + f(b) - b \\ f(x) = a + f^2(b) - f(b) \\ f^2(x) = a + b - f^2(b) \end{cases}$$

En additionnant les lignes, il vient

$$a = \frac{1}{3} [x + f(x) + f^2(x)] \quad \text{et} \quad f(b) - b = x - a = \frac{1}{3} [2x - f(x) - f^2(x)]$$

ce qui prouve l'unicité sous réserve d'existence.

• Synthèse : Soit $x \in E$. On pose

$$a = \frac{1}{3} [\text{id} + f + f^2](x) \quad \text{et} \quad c = \frac{1}{3} [2x - f(x) - f^2(x)]$$

On a clairement $a + c = x$. Puis, on observe la factorisation $X^3 - 1 = (X - 1)(1 + X + X^2)$ d'où

$$(f - \text{id}) \circ (\text{id} + f + f^2) = f^3 - \text{id} = 0 \quad \text{d'où} \quad a \in \text{Ker}(f - \text{id})$$

Reste à établir que $x \in \text{Im}(f - \text{id})$. On a

$$2 - X - X^2 = (X - 1)(-2 - X) \quad \text{d'où} \quad (2\text{id} - f - f^2) = (f - \text{id}) \circ (-2\text{id} - f)$$

puis
$$c = \frac{1}{3}(f - \text{id}) \circ (-2\text{id} - f)(x) \in \text{Im}(f - \text{id})$$

ce qui prouve l'existence. On conclut

$$\boxed{E = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Im}(f - \text{id})}$$

2. Avec la factorisation $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X^2 + X + 1)(X - 1)$, il vient

$$(f - \text{id}) \circ (f^2 + f + \text{id}) = (f^2 + f + \text{id}) \circ (f - \text{id}) = f^3 - \text{id} = 0$$

d'où $\text{Im}(f^2 + f + \text{id}) \subset \text{Ker}(f - \text{id})$ et $\text{Im}(f - \text{id}) \subset \text{Ker}(f^2 + f + \text{id})$

On a remarqué précédemment

$$(X - 1)(X + 2) = X^2 + X - 2 = X^2 + X + 1 - 3$$

d'où
$$1 = \frac{1}{3}(X + 2)(X - 1) + \frac{1}{3}(X^2 + X + 1)$$

et par conséquent
$$\text{id} = \frac{1}{3}(f + 2\text{id}) \circ (f - \text{id}) + \frac{1}{3}(f^2 + f + \text{id})$$

avec commutation dans le produit. On en déduit sans difficulté les inclusions réciproques à celles précédemment obtenues et on conclut

$$\boxed{\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Im}(f^2 + f + \text{id}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f - \text{id}) = \text{Ker}(f^2 + f + \text{id})}$$

Exercice 86 (***)

Soit E un \mathbb{K} -ev et p, q des projecteurs de E . Montrer que

$$p - q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = q$$

Quand cette condition est réalisée, montrer

$$\text{Im}(p - q) = \text{Im } p \cap \text{Ker } q \quad \text{et} \quad \text{Ker}(p - q) = \text{Ker } p + \text{Im } q$$

Corrigé : Raisonnons par équivalence. On a

$$(p - q)^2 = (p - q) \iff p^2 - q \circ p - p \circ q + q^2 = p - q \iff 2q = p \circ q + q \circ p$$

Clairement
$$p \circ q = q \circ p = q \implies 2q = p \circ q + q \circ p$$

ce qui prouve le sens indirect. Supposons $2q = p \circ q + q \circ p$. En composant cette relation par p à droite et de même à gauche, il vient

$$2q \circ p = p \circ q + p \circ q \circ p \quad \text{et} \quad 2p \circ q = p \circ q \circ p + p \circ q$$

En soustrayant les deux égalités obtenues, on trouve $p \circ q = q \circ p$ et en injectant dans l'hypothèse $2q = p \circ q + q \circ p$, on trouve le résultat attendu. Ceci prouve

$$\boxed{p - q \text{ projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = q}$$

Montrons les égalités d'ensembles par double inclusion. Soit $x \in \text{Im}(p - q)$. On dispose de $t \in E$ tel que $x = (p - q)(t)$. Puis, on observe

$$x = p(t) - q(t) = p(t) - p \circ q(t) = p(t - q(t)) \in \text{Im } p$$

et
$$q(x) = q(p(t) - q(t)) = q \circ p(t) - q(t) = q(t) - q(t) = 0_E$$

D'où $x \in \text{Im } p \cap \text{Ker } q$. Réciproquement, soit $x \in \text{Im } p \cap \text{Ker } q$. Comme $p - q$ est un projecteur, on a $\text{Im}(p - q) = \text{Ker}(\text{id} - (p - q))$ donc si $x \in \text{Im}(p - q)$, on devrait avoir $(p - q)(x) = x$. Comme $\text{Im } p = \text{Ker}(\text{id} - p)$, on a effectivement

$$(p - q)(x) = p(x) - q(x) = p(x) = x \in \text{Im}(p - q)$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Im}(p - q) = \text{Im } p \cap \text{Ker } q}$$

Soit $x \in \text{Ker}(p - q)$. On a $p(x) = q(x)$. Puis

$$x = p(x) + (\text{id} - p)(x) = \underbrace{q(x)}_{\in \text{Im } q} + \underbrace{(\text{id} - p)(x)}_{\in \text{Ker } p} \in \text{Ker } p + \text{Im } q$$

Réciproquement, soit $x \in \text{Ker } p + \text{Im } q$. On dispose de $(a, b) \in \text{Ker } p \times E$ tel que $x = a + q(b)$.

Il vient $(p - q)(x) = (p - q)(a + q(b))$

$$= p(a) - q(a) + p \circ q(b) - q^2(b) = -q \circ p(a) + q(b) - q(b) = 0$$

On conclut

$$\boxed{\text{Ker}(p - q) = \text{Ker } p + \text{Im } q}$$

Exercice 87 (*)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$

Corrigé : Soit $x > -1$. On a

$$\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - x + x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)}$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}}$$

Exercice 88 (**)

Déterminer le DL₃(0) de $\sin(\pi\sqrt{1+x})$.

Corrigé : On part du développement usuel

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{3x^3}{2^3 \times 3!} + o(x^3)$$

Puis, par trigonométrie

$$\sin(\pi\sqrt{1+x}) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi x^2}{8} + \frac{\pi x^3}{16} + o(x^3)\right)$$

Le développement à l'ordre 3 de \sin en ne conservant que les termes d'ordre 3 donne

$$\sin(\pi\sqrt{1+x}) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi x}{2} + o(x)\right)^3 + o(x^3)$$

D'où

$$\boxed{\sin(\pi\sqrt{1+x}) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi x^2}{8} + \left(\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{16}\right) x^3 + o(x^3)}$$

Exercice 89 (**)

Soit n entier non nul et $f(x) = (1 - e^x)^n$ pour tout x réel.

1. Montrer que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p$ pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Corrigé : 1. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ comme composée de telles fonctions. On a le développement et l'égalité fournie par le théorème de Taylor-Young

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (1 - 1 - x + o(x))^n = (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

Par unicité du développement limité, on conclut

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad f^{(k)}(0) = 0}$$

2. Un développement de binôme donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{kx}$$

d'où
$$\forall (p, x) \in \llbracket 0; n \rrbracket \times \mathbb{R} \quad f^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p e^{kx}$$

Il en résulte

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^n = (-1)^n n!}$$

Exercice 90 (*)

Soient E, F des \mathbb{K} -ev et f, g dans $\mathcal{L}(E, F)^2$ avec $\text{Im } f$ et $\text{Im } g$ de dimension finie. Montrer

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

Corrigé : On a clairement

$$\text{Im}(f+g) = \{f(x) + g(x), x \in E\} \subset \text{Im } f + \text{Im } g = \{f(x) + g(y), (x, y) \in E \times F\}$$

Passant aux dimensions, il vient

$$\text{rg}(f+g) \leq \dim(\text{Im } f + \text{Im } g)$$

D'après la formule de Grassmann, on sait que

$$\dim(\text{Im } f + \text{Im } g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim \text{Im } f \cap \text{Im } g \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

d'où

$$\boxed{\text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)}$$

Ensuite, avec l'inégalité précédemment établie, en remarquant $\text{rg}(-g) = \text{rg}(g)$, il vient

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f+g-g) \leq \text{rg}(f+g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f+g) + \text{rg}(g)$$

d'où

$$\text{rg}(f) - \text{rg}(g) \leq \text{rg}(f+g)$$

Par symétrie des rôles en f et g , on a également

$$\text{rg}(g) - \text{rg}(f) \leq \text{rg}(f+g)$$

On conclut

$$\boxed{|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f+g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)}$$

Exercice 91 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = M - \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(M)I_n$$

Justifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ puis calculer φ^2 et préciser $\operatorname{Ker} \varphi$, $\operatorname{Im} \varphi$.

Corrigé : L'application φ est à valeurs dans E , linéaire par linéarité de la trace et bilinéarité du produit. Pour $M \in E$, on obtient

$$\varphi^2(M) = \varphi\left(M - \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(M)I_n\right) = \varphi(M) - \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(M)\varphi(I_n)$$

et on observe $\varphi(I_n) = 0$. Ainsi

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi}$$

On a $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker}(\varphi - \operatorname{id}) = \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ puis, avec l'inclusion $\operatorname{Vect}(I_n) \subset \operatorname{Ker} \varphi$ et pour raison de dimension, on conclut

$$\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}(I_n) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \operatorname{Tr}}$$

Remarque : L'application φ est le projecteur sur $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(I_n)$.

Exercice 92 (*)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec n entier non nul. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$.

Corrigé : Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$. On a

$$M \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \iff \sum_{i=1}^n m_{i,i} = 0 \iff m_{1,1} = -\sum_{i=2}^n m_{i,i}$$

Ainsi $M \in \operatorname{Ker} \operatorname{Tr} \iff M = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} + \sum_{i=2}^n m_{i,j} (E_{1,1} - E_{i,i})$

La famille $(E_{1,1} - E_{i,i})_{i \in \llbracket 2; n \rrbracket} \uplus (E_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n}$ est donc génératrice de $\operatorname{Ker} \operatorname{Tr}$ et sa liberté est immédiate. On conclut

$$\boxed{\text{La famille } (E_{1,1} - E_{i,i})_{i \in \llbracket 2; n \rrbracket} \uplus (E_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n} \text{ est une base de } \operatorname{Ker} \operatorname{Tr} .}$$

Exercice 93 (**)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension n entier non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E . On pose

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-anneau et un sev de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer
$$\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$$
3. Déterminer $\dim \mathcal{C}(u)$.

Corrigé : 1. On vérifie sans difficulté que $\text{id} \in \mathcal{C}(u)$, $\mathcal{C}(u)$ sev de $\mathcal{L}(E)$ et $v \circ w \in \mathcal{C}(u)$ pour v, w dans $\mathcal{C}(u)$. Ainsi

L'ensemble $\mathcal{C}(u)$ est un sous-anneau et un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Remarque : On dit que $\mathcal{C}(u)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$.

2. On a clairement $\mathbb{K}_{n-1}[u] \subset \mathcal{C}(u)$. Réciproquement, soit $v \in \mathcal{C}(u)$. Le vecteur $v(x_0)$ se décompose dans la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ en

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \quad \text{avec} \quad (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$$

Soit $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Comme v commute avec u , alors v commute avec u^i pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ puis

$$\begin{aligned} v(u^i(x_0)) &= u^i \circ v(x_0) = u^i \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \right) \\ &= u^i \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \right) (x_0) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k \right) (u^i(x_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, les endomorphismes v et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coïncident sur la base $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ et sont donc égaux ce qui prouve l'inclusion directe. On conclut

$$\mathcal{C}(u) = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k, (a_i)_{i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Variante : Soit $x \in E$. Il existe $(b_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0)$. Ainsi

$$\begin{aligned} v(x) &= v \left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k(x_0) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k v \circ u^k(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \circ v(x_0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k u^k \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x_0) \right) = \sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} a_\ell b_k u^{k+\ell}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell u^\ell(x) \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est génératrice de $\mathcal{C}(u)$. Montrons sa liberté.

Soit $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^{k-1} = 0$. En particulier, en évaluant en x_0 , il vient

$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$. Or la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E donc libre et par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0 \quad \implies \quad \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad a_k = 0$$

Ainsi, la famille $(u^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ est libre et génératrice de $\mathcal{C}(u)$ donc est une base de $\mathcal{C}(u)$. Son cardinal étant égal à n , on conclut

$$\dim \mathcal{C}(u) = n$$

Exercice 94 (**)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Interpréter A comme matrice d'un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé : On décompose

$$A = M + N \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ n & \ddots & & & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On note f et g endomorphismes canoniquement associés à M et N. On a

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad f(X^k) = kX^{k-1} \quad \text{et} \quad g(X^k) = (n-k)X^{k+1} = nX \cdot X^k - X^2 \cdot kX^{k-1}$$

Par suite $\forall P \in E \quad f(P) = P' \quad \text{et} \quad g(P) = nXP - X^2P'$

Ainsi $A = \text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi \quad \text{avec} \quad \forall P \in E \quad \varphi(P) = (1 - X^2)P' + nXP$

Exercice 95 (**)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier non nul. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = X(X-1)P' - nXP$.

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Préciser $\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi$ où \mathcal{C} désigne la base canonique de E.
2. Déterminer des bases de $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

Corrigé : 1. L'application φ est linéaire par linéarité du produit à gauche et de la dérivation. On a

$$\varphi(1) = -nX \in E$$

et $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \varphi(X^k) = (k-n)X^{k+1} - kX^k$

d'où $\varphi(X^k) \in E$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, y compris le cas $k = n$ puisque le coefficient devant le terme en X^{n+1} s'annule. Par caractérisation d'une application linéaire sur une base, on conclut

$$\varphi \in \mathcal{L}(E)$$

Et on a $\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -n & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -(n-1) & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -n \end{pmatrix}$

2. On a $P \in \text{Ker } \varphi \iff X[(X-1)P' - nP] = 0 \iff (X-1)P' - nP = 0$

Résolvons l'équation différentielle associée sur $]1; +\infty[$ et cherchons des solutions polynomiales :

$$(t-1)x'(t) - nx(t) = 0 \iff x \in \text{Vect}(t \mapsto (t-1)^n)$$

D'où

$$\boxed{\text{Ker } \varphi = \text{Vect}((X-1)^n)}$$

Puis, la famille $(\varphi(X^k))_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est génératrice de $\text{Im } \varphi$. D'après le théorème du rang, on cherche à extraire une famille libre de cardinal n de la famille génératrice précédente. Le caractère échelonnée montre que les familles $(\varphi(X^k))_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$ et $(\varphi(X^k))_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ font l'affaire mais on peut fournir une base plus simple encore. Par lecture matricielle, on observe

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad \varphi(X^k) \in \text{Vect}(X, \dots, X^n)$$

d'où

$$\text{Im } \varphi \subset \text{Vect}(X, \dots, X^n)$$

Par égalité des dimensions, on conclut

$$\boxed{\text{La famille } (X, \dots, X^n) \text{ est une base de } \text{Im } \varphi.}$$

Exercice 96 (*)

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

Corrigé : On a $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

S'ensuit un télescopage et on trouve

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}$$

Exercice 97 (**)

1. Soient A, B dans $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg A < \deg B$. On suppose B scindé à racines simples avec $B = \lambda \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$. Montrer

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}$$

2. Soit z_1, \dots, z_n des complexes non nuls deux à deux distincts. On note $P = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$.

Calculer $\sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)}$ pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$

Corrigé : 1. D'après le théorème de décomposition en éléments simples, on dispose de scalaires λ_i tels que

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - \alpha_i}$$

Pour déterminer les λ_i , on effectue l'opération suivante

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \left[\frac{A}{B}(X - \alpha_i) \right]_{X=\alpha_i} = \lambda_i$$

Or, en écrivant $B = (X - \alpha_i)Q_i$ avec $Q_i \in \mathbb{K}[X]$, on constate que $P'(\alpha_i) = Q_i(\alpha_i)$ et il s'ensuit

$$\boxed{\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}}$$

Variante : On peut retrouver directement le résultat du théorème. Soit $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base des polynômes d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ associée à $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. On a $A = \sum_{i=1}^n A(\alpha_i)L_i$ d'où

$$\frac{A}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)L_i}{B} = \sum_{i=1}^n \frac{A(\alpha_i)}{B'(\alpha_i)(X - \alpha_i)}$$

2. Pour $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$, on a
$$\frac{X^{k+1}}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i^{k+1}}{P'(z_i)(X - z_i)}$$

Substituant X par zéro, il vient
$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)}$$

Pour $k = n-1$, on a $\deg X^{k+1} = n$ donc il faudrait isoler la partie entière du reste. On a

$$\frac{X^n}{P} = 1 + \frac{X^n - P}{P} = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{z_i^n}{P'(z_i)(X - z_i)}$$

Substituant X par zéro, on trouve
$$-1 = -\sum_{i=1}^n \frac{z_i^n}{P'(z_i)z_i}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{P'(z_i)} = \delta_{k,n-1}}$$

Exercice 98 (**)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples x_1, \dots, x_n et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P'(\alpha) \neq 0$. Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que

$$|\alpha - x_i| \leq n \left| \frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)} \right|$$

Corrigé : Si $P(\alpha) = 0$, le résultat est trivial. Sinon, on a

$$\frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha - x_k}$$

On choisit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que
$$|\alpha - x_i| = \min_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\alpha - x_k|$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\left| \frac{P'(\alpha)}{P(\alpha)} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{|\alpha - x_k|} \leq \frac{n}{|\alpha - x_i|}$$

Ainsi
$$\boxed{\exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \left| \alpha - x_i \right| \leq n \left| \frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)} \right|}$$

Exercice 99 (*)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$.

1. Étudier le comportement asymptotique de $\int_a^b f(t)e^{int} dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.

2. En déduire les comportements de $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt$ et $\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. Soit n entier non nul. En intégrant par partie, les fonctions f et $t \mapsto \frac{e^{int}}{in}$ étant de classe \mathcal{C}^1 , il vient

$$\int_a^b f(t)e^{int} dt = \left[\frac{f(t)e^{int}}{in} \right]_a^b - \frac{1}{in} \int_a^b f'(t)e^{int} dt$$

D'où
$$\left| \int_a^b f(t)e^{int} dt \right| \leq \frac{1}{n} \left[|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right]$$

Ainsi
$$\boxed{\int_a^b f(t)e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

2. On sait $\forall z \in \mathbb{C} \quad |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

Soit n entier. Il vient

$$\left| \int_a^b f(t) \cos(nt) dt \right| = \left| \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t)e^{int} dt \right) \right| \leq \left| \int_a^b f(t)e^{int} dt \right|$$

et de même
$$\left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| = \left| \operatorname{Im} \left(\int_a^b f(t)e^{int} dt \right) \right| \leq \left| \int_a^b f(t)e^{int} dt \right|$$

On conclut
$$\boxed{\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Exercice 100 (**)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right)$ avec $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R})$

Corrigé : Pour n entier non nul, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. On a

$$S_n^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) = \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right)$$

en séparant les termes diagonaux des autres et par symétrie des sommes hors diagonale. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a

$$S_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f^2(t) dt = O(1)$$

On conclut
$$\boxed{\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\int_0^1 f(t) dt \right)^2}$$

Exercice 101 (***)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$I_n = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^\pi t |\sin(nt)| dt$$

Montrer que les suites $(I_n)_{n \geq 1}$ et $(J_n)_{n \geq 1}$ sont constantes.

Corrigé : Soit n entier non nul. On effectue le changement $u = nt$ de classe \mathcal{C}^1 puis on découpe l'intégrale avec la relation de Chasles et on applique le changement $v = u - k\pi$ de classe \mathcal{C}^1 dans chaque intégrale. On obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} |\sin(u)| du = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)| du \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi |\sin(v + k\pi)| dv = \int_0^\pi \sin(v) dv = 2 \end{aligned}$$

On procède de même pour J_n et on poursuit le calcul par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{n^2} \int_0^{n\pi} u |\sin(u)| du = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} u |\sin(u)| du \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi (v + k\pi) |\sin(v + k\pi)| dv \\ &= \frac{1}{n^2} \left(n \int_0^\pi v |\sin(v)| dv + \pi \frac{n(n-1)}{2} \int_0^\pi |\sin(v)| dv \right) \\ J_n &= \frac{1}{n} \left(\int_0^\pi \left(v - \frac{\pi}{2} \right) \sin(v) dv \right) + \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin(v) dv \end{aligned}$$

Le changement $s = v - \frac{\pi}{2}$ (de classe \mathcal{C}^1) dans la première intégrale de l'égalité ci-dessus donne

$$\int_0^\pi \left(v - \frac{\pi}{2} \right) \sin(v) dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} s \sin\left(\frac{\pi}{2} + s\right) ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} s \cos(s) ds = 0$$

l'intégrale étant nulle comme intégrale d'une fonction impaire sur un domaine centré. On conclut

Les suites $(I_n)_{n \geq 1}$ et $(J_n)_{n \geq 1}$ sont constantes, respectivement égales à 2 et π .

Exercice 102 (Intégrale de Wallis **)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geq 2$.
2. Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles en distinguant selon la parité de n .
3. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_n$.
4. En considérant la suite $(nI_n I_{n-1})_{n \geq 1}$, déterminer un équivalent de I_n pour $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. En intégrant par parties, il vient

$$I_n = [-\cos(t) \sin(t)^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n-2} \cos(t)^2 dt = (n-1) (I_{n-2} - I_n)$$

Ainsi

$$\forall n \geq 2 \quad nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

2. On a $I_n > 0$ pour tout n entier puisque $t \mapsto \sin(t)^n$ est continue positive non nulle. Soit n entier. On a le produit télescopique

$$I_{2n} = I_0 \prod_{k=1}^n \left(\frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} \right) = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)2k}{(2k)^2} = I_0 \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

et
$$I_{2n+1} = I_1 \prod_{k=1}^n \left(\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} \right) = I_1 \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2k+1} \right) = I_1 \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{2k(2k+1)} = I_1 \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Avec $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$, on conclut

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

3. La suite $(I_n)_n$ est clairement décroissante.

4. En multipliant la relation établie à la première question par I_{n-1} , on trouve

$$\forall n \geq 2 \quad n I_n I_{n-1} = (n-1) I_{n-1} I_{n-2}$$

ce qui prouve que la suite est constante. Par suite

$$\forall n \geq 1 \quad n I_n I_{n-1} = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$$

Par décroissance et positivité de $(I_n)_n$, il vient

$$n I_{n+1} I_n = (n+1) I_{n+1} I_n \times \frac{n}{n+1} \leq n I_n^2 \leq n I_n I_{n-1}$$

Par encadrement

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Exercice 103 (**)

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$ si q est non nul.

2. En déduire une expression de $I_{p,q}$ avec des factorielles.

Corrigé : 1. En intégrant par parties (fonctions \mathcal{C}^1), il vient

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt = \left[\frac{t^{p+1} (1-t)^q}{p+1} \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^{p+1} (1-t)^{q-1} dt$$

Autrement dit

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

2. Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad I_{p,q} = \frac{q \times (q-1) \times \dots \times 1}{(p+1) \times (p+2) \times \dots \times (p+q)} I_{p+q,0}$$

avec

$$I_{p+q,0} = \int_0^1 t^{p+q} dt = \frac{1}{p+q+1}$$

puis

$$I_{p,q} = \frac{1 \times \dots \times (p-1) \times p \times q!}{1 \times \dots \times p \times (p+1) \times \dots \times (p+q)} I_{p+q,0} = \frac{p! q!}{(p+q)!} \frac{1}{(p+q+1)}$$

D'où

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad I_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1) \binom{p+q}{p}}$$

Exercice 104 (**)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi avec $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ et $p \in]0; 1[$. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note

$$Y_k = \prod_{i=1}^k X_i, \quad a_k = \mathbb{P}(Y_k = 1) \text{ et } b_k = \mathbb{P}(Y_k = -1).$$

1. Montrer $\exists Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$

2. En déduire une expression de a_n en fonction de n et p .

Corrigé : 1. Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(Y_{k+1} = 1 | Y_k = 1) \mathbb{P}(Y_k = 1) + \mathbb{P}(Y_{k+1} = 1 | Y_k = -1) \mathbb{P}(Y_k = -1)$$

et $\mathbb{P}(Y_{k+1} = -1) = \mathbb{P}(Y_{k+1} = -1 | Y_k = 1) \mathbb{P}(Y_k = 1) + \mathbb{P}(Y_{k+1} = -1 | Y_k = -1) \mathbb{P}(Y_k = -1)$

ce qui se réécrit, par indépendance de X_{k+1} et Y_k

$$\mathbb{P}(Y_{k+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \mathbb{P}(Y_k = 1) + \mathbb{P}(X_{k+1} = -1) \mathbb{P}(Y_k = -1)$$

et $\mathbb{P}(Y_{k+1} = -1) = \mathbb{P}(X_{k+1} = -1) \mathbb{P}(Y_k = 1) + \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) \mathbb{P}(Y_k = -1)$

D'où $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad U_{k+1} = QU_k \quad \text{avec} \quad U_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

2. On en déduit

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad a_{k+1} = pa_k + (1-p)b_k = pa_k + (1-p)(1-a_k) = (2p-1)a_k + 1-p$$

La suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est arithmético-géométrique. Le point fixe α est solution de

$$\alpha = (2p-1)\alpha + 1-p \iff \alpha = \frac{1}{2}$$

puis $\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad a_{k+1} = (2p-1)a_k + 1-p \iff a_{k+1} - \alpha = (2p-1)(a_k - \alpha)$

Tous calculs effectués, on conclut

$$a_n = \frac{1}{2} (1 + (2p-1)^n)$$

Exercice 105 (**)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

Corrigé : Soit N entier tel que $X(\Omega) \subset \llbracket 0; N \rrbracket$ (un tel entier N existe puisque $X(\Omega)$ est une partie finie de \mathbb{N}). On a

$$\sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^N k \mathbb{P}(\{X \geq k\} \setminus \{X \geq k+1\}) = \sum_{k=0}^N k [\mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)]$$

Avec un changement d'indice, on obtient

$$\sum_{k=0}^N k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^N k\mathbb{P}(X \geq k) - \sum_{k=1}^{N+1} (k-1)\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=1}^N \mathbb{P}(X \geq k) - N\mathbb{P}(X \geq N+1)$$

Autrement dit

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

Variante : On peut aussi écrire

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^N \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^N \{X = k\}\right) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=n}^N \mathbb{P}(X = k)$$

puis permuter les sommes.

Exercice 106 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini, U et V des variables aléatoires réelles vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}(U^k) = \mathbb{E}(V^k)$$

Montrer que U et V ont même loi.

Corrigé : Par linéarité de l'espérance, on trouve

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X] \quad \mathbb{E}(Q(U)) = \mathbb{E}(Q(V))$$

Notons $A = U(\Omega) \cup V(\Omega) = \{a_i, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$. Par transfert, on a

$$\sum_{i=1}^n Q(a_i)\mathbb{P}(U = a_i) = \sum_{i=1}^n Q(a_i)\mathbb{P}(V = a_i)$$

En considérant la famille des polynômes de Lagrange $(L_j)_{1 \leq j \leq n}$ associés à A , on obtient

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \mathbb{P}(U = a_j) = \mathbb{E}(L_j(U)) = \mathbb{E}(L_j(V)) = \mathbb{P}(V = a_j)$$

On conclut

Les variables aléatoires U et V ont même loi.

Remarque : L'étape décisive est de considérer $U(\Omega) \cup V(\Omega)$. Si on ne procède pas ainsi, les choses deviennent rapidement indémêlables ...

Exercice 107 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\llbracket 0; 2N \rrbracket$ avec N entier non nul. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Calculer $m = \mathbb{E}(X_1)$.
2. Soit $t > 0$. Justifier l'égalité

$$\left\{S_n \geq \frac{3nm}{2}\right\} = \left\{e^{t(S_n - nN)} \geq e^{\frac{tNn}{2}}\right\}$$

3. En déduire $\forall t > 0 \quad \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{3nm}{2}\right) \leq e^{n\varphi(t)}$

avec
$$\varphi(t) = -\frac{Nt}{2} + \ln\left(\frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)}\right) - \ln(2N+1)$$

4. Déterminer un développement limité de φ en 0 à l'ordre 1.

5. Conclure qu'il existe $r \in]0; 1[$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{3nm}{2}\right) \leq r^n$$

Corrigé : 1. Par linéarité de l'espérance on trouve

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2N+1} \sum_{k=0}^{2N} k = \frac{2N(2N+1)}{2(2N+1)} = N$$

2. On a $m = N$ et par croissance stricte de $u \mapsto e^{tu}$ pour $t > 0$, on obtient

$$\forall t > 0 \quad \left\{S_n \geq \frac{3nm}{2}\right\} = \left\{S_n - nN \geq \frac{nN}{2}\right\} = \left\{e^{t(S_n - nN)} \geq e^{\frac{tnN}{2}}\right\}$$

3. Soit $t > 0$. D'après l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire positive $e^{t(S_n - nN)}$, il vient

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{3nm}{2}\right) = \mathbb{P}\left(e^{t(S_n - nN)} \geq e^{\frac{tnN}{2}}\right) \leq e^{-\frac{tnN}{2}} \times \mathbb{E}\left(e^{t(S_n - nN)}\right)$$

Puis, par indépendance des X_i

$$\mathbb{E}\left(e^{t(S_n - nN)}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{t(X_i - N)}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{t(X_i - N)}\right)$$

et par transfert

$$\mathbb{E}\left(e^{t(X_i - N)}\right) = \frac{e^{-tN}}{2N+1} [1 + e^t + \dots + e^{t2N}] = \frac{e^{-tN}}{2N+1} \times \frac{1 - e^{(2N+1)t}}{1 - e^t}$$

Avec une factorisation de type angle moitié, on obtient

$$\mathbb{E}\left(e^{t(X_i - N)}\right) = \frac{e^{-tN}}{2N+1} \times \frac{e^{(N+1/2)t}}{e^{t/2}} \times \frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)} = \frac{1}{2N+1} \times \frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)}$$

$$\forall t > 0 \quad \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{3nm}{2}\right) \leq e^{n\varphi(t)} \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = -\frac{Nt}{2} + \ln\left(\frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)}\right) - \ln(2N+1)$$

4. La fonction $t \mapsto \frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)}$ est paire comme quotient de deux fonctions impaires et son développement limité à l'ordre 1 donne

$$\left(\frac{\text{sh}((N+1/2)t)}{\text{sh}(t/2)}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} (2N+1) + o(t)$$

Par suite

$$\varphi(t) = -\frac{Nt}{2} + \ln((2N+1) + o(t)) - \ln(2N+1) \quad \text{et} \quad \ln((2N+1) + o(t)) = \ln(2N+1) + o(t)$$

Ainsi

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} -\frac{Nt}{2} + o(t)$$

5. D'après l'équivalent précédemment obtenu, la fonction φ prend des valeurs négatives au voisinage de zéro. On dispose donc de $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0) < 0$ et, avec le choix $r = e^{\varphi(t_0)}$, on conclut

$$\exists r \in]0; 1[\quad | \quad \forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{3nm}{2}\right) \leq r^n$$

Exercice 108 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer
$$\mathbb{P}\left(S_n > \frac{np}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(S_n \leq \frac{np}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dans ce qui suit, on note

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = \left\{S_n > \frac{np}{2}\right\} \quad \text{et} \quad B_n = \left\{S_n \leq \frac{np}{2}\right\}$$

2. Montrer
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Corrigé : 1. D'après la loi faible des grands nombres, il vient

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \frac{p}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Soit n entier non nul. On a

$$\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \frac{p}{2}\right\} = \left\{S_n \geq \frac{3np}{2}\right\} \sqcup \left\{S_n \leq \frac{np}{2}\right\}$$

Ainsi
$$0 \leq \mathbb{P}\left(S_n \leq \frac{np}{2}\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \frac{p}{2}\right)$$

et comme les événements $\left\{S_n > \frac{np}{2}\right\}$ et $\left\{S_n \leq \frac{np}{2}\right\}$ forment un système complet, on conclut

$$\boxed{\mathbb{P}\left(S_n > \frac{np}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(S_n \leq \frac{np}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\text{Arctan}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$, on dispose de $A > 0$ tel que pour $x \geq A$

$$\left|\text{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$$

On décompose

$$\left\{\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon\right\} = \left\{\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon, S_n > \frac{np}{2}\right\} \sqcup \left\{\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon, S_n \leq \frac{np}{2}\right\}$$

Pour n assez grand, on a $\frac{np}{2} \geq A$ et par conséquent

$$\left\{\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon, S_n > \frac{np}{2}\right\} = \emptyset$$

d'où
$$\mathbb{P}\left(\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}(B_n)$$

Et on conclut
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\text{Arctan}(S_n) - \frac{\pi}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Exercice 109 (*)

Soit $c = (i_1 \dots i_p)$ un p -cycle de S_n . Pour $\sigma \in S_n$, déterminer $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Corrigé : Soit $\gamma = \sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$. On vérifie que $\gamma(\sigma(i_k)) = \sigma(i_{k+1})$ pour tout $k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$ et $\gamma(\sigma(i_p)) = \sigma(i_1)$. Par ailleurs, on a $\gamma(i) = i$ pour tout $i \notin \sigma(\text{supp } c)$. Ainsi

$$\boxed{\forall \sigma \in S_n \quad \sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_p))}$$

Exercice 110 (*)

Soit $n \geq 2$. Calculer

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)$$

Corrigé : Soit τ une transposition de S_n . L'application $\varphi : S_n \rightarrow S_n, \sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une permutation de S_n (c'est une involution). Par conséquent, on a

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\tau \circ \sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\tau) \varepsilon(\sigma)$$

Or, la signature d'une transposition est égale à -1 et par conséquent

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = - \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)$$

Ainsi

$$\boxed{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = 0}$$

Variante : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}$. Ainsi, notant J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de 1, on a

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) = \det J$$

La matrice J contient (au moins) deux colonnes identiques et n'est donc pas inversible. On retrouve alors le résultat précédent.

Exercice 111 (*)

Soit $n \geq 2$ et $\sigma \in S_n$. On note r le nombre de cycles dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints et p le nombre de points fixes. Déterminer $\varepsilon(\sigma)$ en fonction de n, r et p .

Corrigé : On note $\sigma = \prod_{i=1}^r c_i$ la décomposition en cycles à supports disjoints. Il vient

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i=1}^r \varepsilon(c_i) = \prod_{i=1}^r (-1)^{\ell(c_i)-1} = (-1)^{\sum_{i=1}^r \ell(c_i) - r}$$

où $\ell(c_i)$ désigne la longueur du cycle c_i pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$. Or, on a

$$n = p + \sum_{i=1}^r \ell(c_i)$$

Ainsi

$$\boxed{\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-p-r}}$$

Exercice 112 (**)

Soient a, x, y, z des complexes. Calculer le déterminant d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{vmatrix} a & x & \dots & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix}$$

Corrigé : Supposons $z \neq 0$. Avec l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{x}{z} \sum_{i=2}^n L_i$, on obtient

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a - \frac{(n-1)xy}{z} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & z \end{vmatrix} = z^{n-1} \left[a - \frac{(n-1)xy}{z} \right] = z^{n-2} [az - (n-1)xy]$$

Pour étendre le résultat précédent au cas $z = 0$, on constate qu'il faut considérer $n = 1$ à part. Supposons $z = 0$. Pour $n > 2$, le déterminant est clairement nul puisqu'il possède deux colonnes identiques. Et pour $n = 2$, on a

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & x \\ y & 0 \end{vmatrix} = -xy$$

Finalement, la formule obtenue pour $z \neq 0$ vaut aussi pour $z = 0$ et $n \geq 2$. On conclut

$$\boxed{\Delta_1 = a \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad \Delta_n = z^{n-2} [az - (n-1)xy]}$$

Variante : On effectue $C_k \leftarrow C_k - C_n$ pour $k \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$ puis on développe sur la première ligne.

Exercice 113 (**)

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec n entier non nul. Montrer que si les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Corrigé : Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $AP = PB$. On note $P_1 = \operatorname{Re} P$ et $P_2 = \operatorname{Im} P$. On a $AP_1 = P_1B$ et $AP_2 = P_2B$ d'où $A\varphi(t) = \varphi(t)B$ avec $\varphi(t) = P_1 + tP_2$ pour tout $t \in \mathbb{C}$. D'après la formule du déterminant, on a $t \mapsto \det \varphi(t)$ polynomiale et $\det \varphi(i) \neq 0$ puisque $\varphi(i) = P \in GL_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, il existe t_0 réel tel que $\det \varphi(t_0) \neq 0$ et par conséquent

$$A\varphi(t_0) = \varphi(t_0)B \quad \text{avec} \quad \varphi(t_0) \in GL_n(\mathbb{R})$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Les matrices A et B sont semblables dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Exercice 114 (***)

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans A partie finie de \mathbb{R} . On définit

$$\forall \omega \in \Omega \quad V(X_1, \dots, X_n)(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ X_1(\omega) & \dots & X_n(\omega) \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{n-1}(\omega) & \dots & X_n^{n-1}(\omega) \end{vmatrix}$$

Déterminer $\mathbb{E}(V(X_1, \dots, X_n))$.

Corrigé : On a $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \sim (X_2, X_1, X_3, \dots, X_n)$. En effet, pour $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$, il vient par indépendance

$$\mathbb{P}((X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

puis par égalité en loi

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = \mathbb{P}(X_2 = x_1) \mathbb{P}(X_1 = x_2) \prod_{i=3}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

et à nouveau par indépendance

$$\mathbb{P}(X_2 = x_1) \mathbb{P}(X_1 = x_2) \prod_{i=3}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) = \mathbb{P}((X_2, X_1, X_3, \dots, X_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n))$$

d'où l'égalité en loi annoncée. Il s'ensuit

$$\mathbb{E}(V_n(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)) = \mathbb{E}(V_n(X_2, X_1, X_3, \dots, X_n))$$

Or, d'après les propriétés du déterminant, on a

$$\forall \omega \in \Omega \quad V_n(X_2, X_1, X_3, \dots, X_n)(\omega) = -V_n(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)(\omega)$$

Par linéarité de l'espérance, il en résulte que

$$\boxed{\mathbb{E}(V_n(X_1, \dots, X_n)) = 0}$$

Variantes : 1. Par transfert, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n(X_1, \dots, X_n)) &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A^n} V_n(x_1, \dots, x_n) \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A^n} V_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \end{aligned}$$

On échange les rôles de x_1 et x_2 et comme X_1 et X_2 suivent la même loi, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n(X_1, \dots, X_n)) &= \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A^n} V_n(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \\ &= - \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in A^n} V_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \end{aligned}$$

et on conclut à la nullité de l'espérance.

2. On note $\mathcal{P}_n(A)$ l'ensemble des parties de A à n éléments. Pour $B \in \mathcal{P}_n(A)$, on note $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ avec les b_i deux à deux distincts. Il vient

$$\mathbb{E}(V_n(X_1, \dots, X_n)) = \sum_{B \in \mathcal{P}_n(A)} \sum_{\sigma \in S_n} V_n(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = b_{\sigma(i)})$$

Comme les X_i ont même loi, on a $\mathbb{P}(X_i = b_{\sigma(i)}) = \mathbb{P}(X_{\sigma(i)} = b_{\sigma(i)})$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n(X_1, \dots, X_n)) &= \sum_{B \in \mathcal{P}_n(A)} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) V_n(b_1, \dots, b_n) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{P}_n(A)} V_n(b_1, \dots, b_n) \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Exercice 115 (**)

Nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{n^4+1})$.

Corrigé : Pour n entier non nul, il vient

$$\sin(\pi\sqrt{n^4+1}) = \sin\left(\pi n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}\right)$$

On a le développement usuel $\sqrt{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + o(u)$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad \sin(\pi\sqrt{n^4+1}) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sin\left(\pi n^2 \left(1 + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sin\left(\pi n^2 + \frac{\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^{n^2} \sin\left(\frac{\pi}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

et par conséquent $\left|\sin(\pi\sqrt{n^4+1})\right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$

Ainsi

La série $\sum \sin(\pi\sqrt{n^4+1})$ converge absolument.

Exercice 116 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Corrigé : La série vérifie le critère des séries alternées puisque la suite $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_n$ décroît et

tend vers zéro. Avec l'égalité $\int_0^1 t^{2k} dt = \frac{1}{2k+1}$ pour k entier, on a pour n entier par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t^2)^k dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

Puis $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2(n+1)} dt = \frac{1}{2n+3}$

Ainsi

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge et sa somme vaut $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 117 (**)

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}$.

Indication : considérer $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Corrigé : Soit n entier. On pose $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. On a

$$v_n = \ln\left(e \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Avec le développement $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + O(u^3)$, il vient

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, on conclut

La série $\sum v_n$ converge absolument.

La série télescopique $\sum_{n \geq 1} v_n = \sum_{n \geq 1} [\ln u_{n+1} - \ln u_n]$ converge et par conséquent la suite $(\ln u_n)_n$ admet une limite finie. Passant à l'exponentielle, on obtient

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C \quad \text{avec} \quad C > 0$$

Remarque : On a donc établi

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{avec} \quad K > 0$$

Il s'agit de l'équivalent de *de Moivre* avec une constante K non explicite, contribution que l'on doit à *Stirling*.

Exercice 118 (Constante γ d'Euler **)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.

Corrigé : On pose $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 2$. On a

$$v_n = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} v_n$ d'après le critère de Riemann et comme c'est une série télescopique, sa convergence équivaut à celle de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'où

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \quad \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma \right.$$

Exercice 119 (*)

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ bijective. Étudier la nature des séries de terme général :

1. $\frac{1}{\sigma(n) + n^2}$
2. $\frac{1}{\sigma(n)^2 + n}$

Corrigé : 1. On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{1}{\sigma(n) + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

d'où $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sigma(n) + n^2} \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} < +\infty$

La famille $\left(\frac{1}{\sigma(n) + n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

2. On a $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq \frac{1}{\sigma(n)^2 + n} \leq \frac{1}{\sigma(n)^2}$

Or, on dispose de l'équivalence

$$\left(\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*) \iff \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$$

Et comme on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, on conclut

La famille $\left(\frac{1}{\sigma(n)^2 + n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable.

Remarque : On peut aussi observer

$$\left(\frac{1}{\sigma(n)^2 + n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*) \iff \left(\frac{1}{n^2 + \sigma^{-1}(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*)$$

et comme $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ réalise une permutation de $\mathcal{S}(\mathbb{N}^*)$, on conclut avec le résultat établi à la première question.

Exercice 120 (**)

Soit α réel. Étudier la somme $\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$.

Corrigé : Pour $p \geq 2$, on pose

$$I_p = \{(n, m) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m + n = p\} = \{(k, p - k), k \in \llbracket 1; p - 1 \rrbracket\}$$

La famille $(I_p)_{p \geq 2}$ est un recouvrement disjoint de \mathbb{N}^{*2} . D'après le théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs, il vient

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{(m,n) \in I_p} \frac{1}{(m+n)^\alpha} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{p^\alpha} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{p-1}{p^\alpha}$$

Or, on a $\frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$

D'après le critère des équivalents, licite pour des familles positives, et le critère de Riemann, on conclut

La famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 121 (**)

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Justifier l'existence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2}$ puis montrer

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2k+2) z^{2k} \quad \text{avec} \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Corrigé : Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. La sommabilité de $\left(\frac{1}{n^2 - z^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ équivaut à la convergence absolue de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - z^2}$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{|n^2 - z^2|} \leq \frac{1}{n^2 - |z|^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence absolue par comparaison et critère de Riemann. Puis, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{n}\right)^{2k}$$

Vérifions la sommabilité de la famille concernée afin de pouvoir appliquer le théorème de Fubini.

La série géométrique $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{|z|}{n}\right)^{2k}$ converge avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{|z|}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{1 - \left(\frac{|z|}{n}\right)^2}$$

puis la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{|z|}{n}\right)^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - |z|^2}$$

converge d'après les résultats antérieurs. Ainsi, d'après le théorème de Fubini, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2(k+1)}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2k} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2(k+1)}}$$

On conclut

La famille $\left(\frac{1}{n^2 - z^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable avec $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2(k+1)) z^{2k}$.

Exercice 122 (*)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta$$

Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Corrigé : Pour $(P, Q) \in E$, l'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment, l'intégrande $\theta \mapsto P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))$ étant continue sur $[0; \pi]$. La forme est clairement symétrique, linéaire en la première variable par linéarité du produit à gauche et linéarité de l'intégrale. Pour $P \in E$, on a

$$\langle P, P \rangle = \int_0^\pi P^2(\cos(\theta)) d\theta \geq 0$$

par positivité de l'intégrale. Enfin, si $\langle P, P \rangle = 0$, l'intégrande $\theta \mapsto P^2(\cos(\theta))$ étant continue positif sur $[0; \pi]$, il vient

$$\forall \theta \in [0; \pi] \quad P^2(\cos(\theta)) = 0$$

d'où

$$\forall \theta \in [0; \pi] \quad P(\cos(\theta)) = 0$$

Or, la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ réalise une surjection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$ d'où

$$\forall t \in [-1; 1] \quad P(t) = 0$$

Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines ce qui prouve qu'il s'agit du polynôme nul.

On conclut L'application $(P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire sur E .

Exercice 123 (**)

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k}$

Corrigé : On munit \mathbb{R}^{n+1} de sa structure euclidienne canonique. On choisit

$$x = (0, \sqrt{\binom{n}{1}}, \sqrt{2\binom{n}{2}}, \dots, \sqrt{n\binom{n}{n}}) \quad y = (\sqrt{\binom{n}{0}}, \sqrt{\binom{n}{1}}, \dots, \sqrt{\binom{n}{n}})$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{k} \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k \right) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right)}$$

Enfin, le cas d'égalité n'est pas réalisé car les vecteurs ne sont pas colinéaires et on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{k} < \sqrt{2^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k}}$$

Remarques : (1) On sait calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k \dots$

(2) On peut aussi considérer \mathbb{R}^{n+1} muni du produit scalaire

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{n+1})^2 \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k y_k$$

Exercice 124 (**)

Soit E euclidien et F, G des sev de E .

1. Déterminer $(F + G)^\perp$.
2. En déduire $(F \cap G)^\perp$.

Corrigé : 1. On a $F \subset F + G$ et $G \subset F + G$ d'où $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F + G)^\perp \subset G^\perp$. Ainsi, on a $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Réciproquement, soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$ et $(u, v) \in F \times G$. On a

$$\langle x, u + v \rangle = \langle x, u \rangle + \langle x, v \rangle = 0$$

d'où l'inclusion $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$ et par conséquent

$$\boxed{F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp}$$

2. En appliquant le résultat antérieur à F^\perp et G^\perp , il vient

$$F \cap G = (F^\perp + G^\perp)^\perp$$

Passant à l'orthogonal, on obtient $\boxed{(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp}$

Exercice 125 (**)

Justifier l'existence puis calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt$.

Corrigé : Notons $\Lambda = \left\{ \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

C'est une partie non vide de \mathbb{R} et minorée donc elle admet une borne inférieure finie. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ pour $(P, Q) \in E^2$ et on note $F = \text{Vect}(X, X^2)$. En utilisant notamment la croissance et continuité de $u \mapsto u^2$ sur \mathbb{R}_+

$$\text{Inf } \Lambda = \text{Inf}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|1 + aX + bX^2\|^2 = \left(\text{Inf}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|1 - (-aX - bX^2)\| \right)^2 = d(1, F)^2$$

Comme le sev F est de dimension finie, on a par caractérisation métrique du projeté orthogonal

$$d(1, F) = \|1 - p_F(1)\|$$

Par caractérisation géométrique du projeté orthogonal, il vient pour $P \in E$

$$P = p_F(1) \iff \begin{cases} P \in F \\ 1 - P \in F^\perp \end{cases} \iff \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \left| \begin{cases} P = \alpha X + \beta X^2 \\ \langle 1 - P, X \rangle = 0 \\ \langle 1 - P, X^2 \rangle = 0 \end{cases} \right.$$

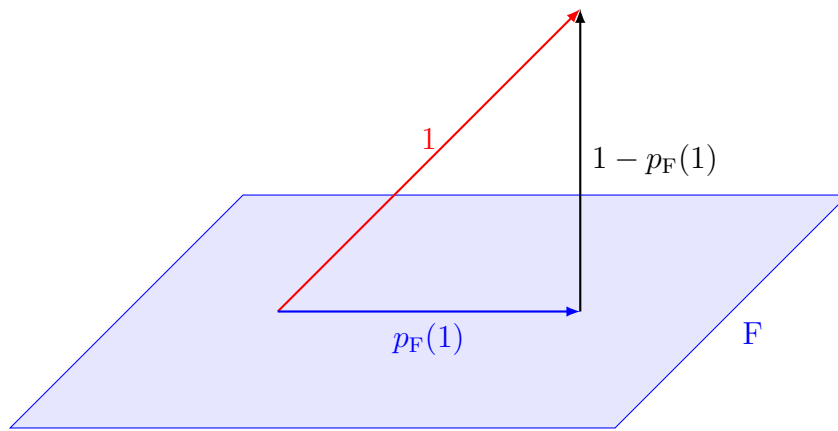


FIGURE 9 – Distance à un sev de dimension finie

Ainsi, les scalaires α, β sont solutions de

$$\begin{cases} \langle X, X \rangle \alpha + \langle X^2, X \rangle \beta = \langle 1, X \rangle \\ \langle X, X^2 \rangle \alpha + \langle X^2, X^2 \rangle \beta = \langle 1, X^2 \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{5} = \frac{1}{3} \end{cases} \iff (\alpha, \beta) = \left(4, -\frac{10}{3} \right)$$

Enfin
$$\|1 - p_F(1)\|^2 = \langle 1 - p_F(1), 1 \rangle = \int_0^1 \left(1 - 4t + \frac{10}{3}t^2 \right) dt$$

On conclut

$$\boxed{\text{Inf}_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (1 + at + bt^2)^2 dt = \frac{1}{9}}$$

Exercice 126 (*)

Soit E préhilbertien réel et a vecteur normé de E . On pose

$$\forall x \in E \quad f(x) = x - \langle x, a \rangle a$$

1. Justifier que $f \in \mathcal{L}(E)$ puis décrire f .

2. On suppose E euclidien muni de \mathcal{B} une base orthonormée. On note $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}a$. Déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}}f$.

Corrigé : 1. L'application f est clairement à valeurs dans E , linéaire par bilinéarité du produit scalaire et du produit externe. Ainsi

$$f \in \mathcal{L}(E)$$

La famille (a) est une base orthonormée de $\text{Vect}(a)$. L'application $x \in E \mapsto \langle x, a \rangle a$ est le projecteur sur $\text{Vect}(a)$ parallèlement à $\text{Vect}(a)^\perp$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application } f = \text{id} - p_{\text{Vect}(a)} \text{ est le projecteur sur } \text{Vect}(a)^\perp \text{ parallèlement à } \text{Vect}(a).}$$

Vocabulaire : Les projecteurs $p_{\text{Vect}(a)}$ et $\text{id} - p_{\text{Vect}(a)}$ sont *associés*. Ils sont dits *projecteurs orthogonaux* puisque leurs images et noyaux sont orthogonaux.

2. Soit $x \in E$ et $X = \text{mat}_{\mathcal{B}}x$. Par symétrie du produit scalaire, interprétation du produit externe comme produit par une matrice scalaire puis associativité du produit matriciel, il vient en notant $B = \text{mat}_{\mathcal{B}}f$

$$\begin{aligned} f(x) = x - 2 \langle a, x \rangle a &\iff BX = X - 2(A^\top X)A \\ &= X - 2A(A^\top X) = X - 2(AA^\top)X = (I_n - 2AA^\top)X \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}}f = I_n - 2AA^\top}$$