ISM MP, Mathématiques
Année 2025/2026

Préparation à l'oral - Feuille n°7

Exercice 1 (CCINP 2025)

On pose $\qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$

1. La fonction f admet-elle des extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. La fonction f admet-elle des extremums globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. On pose $\mathrm{K} = [\,0\,;1\,]^2$. Justifier que la fonction f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Corrigé : Exercice 56 CCPINP 2025

Exercice 2 (CCINP 2025)

Soit E un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer
2. Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,], \mathbb{R}) \mid \forall x \in [\,a\,;b\,] \quad f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble
$$\left\{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}, f \in \mathrm{E}\right\}$$
admet une borne inférieure m et déterminer sa valeur.

Corrigé : Exercice 76 CCPINP 2025

Exercice 3 (CCINP 2025)

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit $(\mathrm{Y}_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ayant un moment d'ordre 2. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k$ pour n entier. Montrer
$$\forall a > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{\mathrm{S}_n}{n} - \mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(\mathrm{Y}_1)}{na^2}$$
3. Application : on effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprises entre 0.35 et 0.45 ?

Corrigé : Exercice 99 CCINP 2025

Exercice 4 (Mines 2025)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que pour $r > 0$ assez grand, on a

$$\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^k}{r^{k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}}$$

2. Montrer que pour $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ et pour $r > 0$ assez grand, on a

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{-1}\,\mathrm{d}t$$

3. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.

Corrigé : On munit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative.

1. Soit $r > \|\mathrm{A}\|$ et t réel. On a $\|r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{A}\| = r^{-1}\|\mathrm{A}\| < 1$ puis pour N entier, il vient par téléscopage, passage à la limite en utilisant $\|(r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{A})^{\mathrm{N}+1}\| \leqslant (r^{-1}\|\mathrm{A}\|)^{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} 0$ et continuité du produit matriciel

$$(\mathrm{I}_n - r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{A})\sum_{k=0}^{\mathrm{N}}(r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{A})^k = \mathrm{I}_n - (r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{A})^{\mathrm{N}+1} \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} \mathrm{I}_n$$

Ainsi
$$(\mathrm{I}_n - r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}^k}{r^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}}$$

et
$$\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{-1} = r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}(\mathrm{I}_n - r^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\mathrm{A})^{-1}$$

On conclut
$$\boxed{\forall r > \|\mathrm{A}\| \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}^k}{r^{k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+1)t}}}$$

2. Soit ℓ entier et t réel. Pour $r > \|\mathrm{A}\|$, il vient

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^\ell(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} r^{\ell-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)t}\mathrm{A}^k$$

On pose
$$\forall (k,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} \qquad u_k(t) = r^{\ell-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)t}\mathrm{A}^k$$

On a
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|u_k\|_\infty \leqslant r^\ell(r^{-1}\|\mathrm{A}\|)^k$$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions continues $\sum u_k$.

Ainsi
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^\ell(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_k(t)\,\mathrm{d}t$$

Sans difficulté, on trouve pour k entier

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{\ell-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)t}\mathrm{A}^k\,\mathrm{d}t = r^{\ell-k}\mathrm{A}^k\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-k)t}\,\mathrm{d}t}_{=\delta_{\ell,k}}$$

d'où
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^\ell(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} r^{\ell-k}\mathrm{A}^k\delta_{\ell,k} = \mathrm{A}^\ell$$

Par combinaison linéaire avec la linéarité de l'intégrale (sur segment), on obtient

$$\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \qquad \forall r > \|\mathrm{A}\| \qquad \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{P}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{-1}\,\mathrm{d}t}$$

3. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On a $\mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top \mathrm{M} = \det(\mathrm{M})\mathrm{I}_n$ d'où $\det(\mathrm{M})\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{Com}(\mathrm{M})^\top$. La transposée de la comatrice est à coordonnées polynomiales en les coefficients de la matrice M. Pour $\mathrm{M} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ avec r et t réel, les coordonnées sont donc polynomiales en $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Ainsi, on dispose d'une suite de matrices $(\mathrm{B}_j)_{0 \leqslant j \leqslant p}$ telle que

$$\begin{aligned} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\chi_{\mathrm{A}}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{-1} &= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\det(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{-1} \\ &= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{Com}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^\top = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\sum_{j=0}^{p} r^j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt}\mathrm{B}_j \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient pour $r > \|\mathrm{A}\|$

$$\int_{-\pi}^{\pi} r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\chi_{\mathrm{A}}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{I}_n - \mathrm{A}\right)^{-1}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=0}^{p} r^{j+1}\mathrm{e}^{ir(j+1)t}\mathrm{B}_j\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{p} r^{j+1}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j+1)t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{B}_j = 0$$

On conclut $\boxed{\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0}$

Exercice 5 (Mines 2025)

1. Rappeler la définition de la fonction indicatrice d'Euler puis, pour n entier non nul, exprimer $\varphi(n)$ en fonction de sa décomposition en facteurs premiers.
2. Pour n entier non nul, calculer $\sum_{d|n}\varphi(d)$.
3. En déduire le déterminant de $\mathrm{C} = \left(i \wedge j\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec n entier non nul.

Corrigé : 1. On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \varphi(n) = \mathrm{Card}\,\{k \in [\![1\,;\,n]\!] \mid k \wedge n = 1\}$$

Pour $n \geqslant 2$, on note $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers avec les p_i premiers deux à deux distincts et les α_i entiers non nuls. D'après le théorème chinois et le comptage des diviseurs d'une puissance d'un nombre premier, il vient

$$\varphi\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{r}\varphi(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{r}\varphi(p_i^{\alpha_i}) = \prod_{i=1}^{r}(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1})$$

D'où $\boxed{\varphi\left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}\right) = n\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)}$

2. On a $[\![1\,;\,n]\!] = \bigsqcup_{d|n}\{k \in [\![1\,;\,n]\!] \mid k \wedge n = d\}$

Par ailleurs, pour $d|n$, on a

$$k \wedge n = d \iff \exists!(k', n') \in \mathbb{Z}^2 \quad | \quad k = k'd \qquad n = n'd \quad \text{et} \quad k' \wedge n' = 1$$

Comme n est entier non nul, alors $n' = \frac{n}{d}$ l'est également. Ainsi, on peut mettre en bijection $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ vérifiant $k \wedge n = d$ avec $k' \in [\![1\,;\,n']\!]$ vérifiant $k' \wedge n' = 1$. Il s'ensuit

$$\mathrm{Card}\,\{k \in [\![1\,;\,n]\!] \mid k \wedge n = d\} = \mathrm{Card}\,\{k' \in [\![1\,;\,n']\!] \mid k' \wedge n' = 1\} = \varphi(n')$$

Comme il s'agit d'union disjointe, on obtient

$$\operatorname{Card} [\![1\,;\, n]\!] = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$$

et comme l'application $d \mapsto \dfrac{n}{d}$ réalise une permutation de l'ensemble des diviseurs de n (involutive), on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{d|n} \varphi(d) = n}$$

3. On pose $\mathrm{D} = \big(i \wedge j\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]$. On rappelle que pour d entier, on a

$$d|i \wedge j \iff d|i \quad \text{et} \quad d|j$$

D'après la relation précédemment établie, il vient

$$i \wedge j = \sum_{d|i\wedge j} \varphi(d) = \sum_{d|i,\, d|j} \varphi(d) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \mathbb{1}_{\mathcal{D}_i}(k) \mathbb{1}_{\mathcal{D}_j}(k) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

avec
$$a_{i,k} = \varphi(k) \mathbb{1}_{\mathcal{D}_i}(k) \quad \text{et} \quad b_{k,j} = \mathbb{1}_{\mathcal{D}_j}(k)$$

d'où
$$\mathrm{D} = \mathrm{AB} \quad \text{avec} \quad \mathrm{A} = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \big(b_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

La matrice A est triangulaire inférieure et la matrice B est triangulaire supérieure. Ainsi, on obtient

$$\det(\mathrm{D}) = \det(\mathrm{A}) \det(\mathrm{B}) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}\right) \left(\prod_{i=1}^{n} b_{i,i}\right)$$

Et on conclut
$$\boxed{\det(\mathrm{D}) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k)}$$

On étend la définition des coefficients $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![0\,;\, n]\!]^2$ en posant $\varphi(0) = 0$ et en observant que $\mathcal{D}_0 = \mathbb{N}$ (tout nombre est diviseur de zéro). Pour $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = i \wedge j$$

Pour $j = 0$ et $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{d|i} \varphi(d) = i = i \wedge 0$$

Pour $i = j = 0$, on trouve
$$\sum_{k=0}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) \neq 0 = 0 \wedge 0$$

On note $\widetilde{\mathrm{A}} = \big(a_{i,j}\big)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\widetilde{\mathrm{B}} = \big(b_{i,j}\big)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$. La première colonne de $\widetilde{\mathrm{A}}$ est nulle d'où $\det(\widetilde{\mathrm{A}}) = 0$. Par linéarité sur la première colonne, on trouve

$$\det(\widetilde{\mathrm{A}}\widetilde{\mathrm{B}}) = \left|\begin{array}{c|c} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) & \mathrm{L} \\ \hline 0 & \mathrm{D} \end{array}\right| + \det(\mathrm{C})$$

On conclut
$$\boxed{\det(\mathrm{C}) = -\left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(k)\right) \prod_{k=1}^{n} \varphi(k)}$$

Exercice 6 (Centrale 2025)

Soient λ et c réels. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, on considère l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f(\lambda x) \tag{E_λ}$$

On note $\mathcal{S}_{\lambda,c}$ l'ensemble des solutions f de (E_λ) qui vérifient de plus $f(0) = c$.

1. Déterminer $\mathcal{S}_{1,c}$ et $\mathcal{S}_{-1,c}$.
   Dans la suite, on suppose $|\lambda| < 1$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \lambda^{n(n-1)/2} \dfrac{x^n}{n!}$. En déduire un élément de $\mathcal{S}_{\lambda,c}$.
3. (a) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer

$$f \in \mathcal{S}_{\lambda,c} \iff \mathrm{T}(f) = f \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}(f) : x \mapsto c + \int_0^x f(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_{\lambda,c}$ est un singleton.

Corrigé : 1. Sans difficulté, on trouve

$$\boxed{\mathcal{S}_{1,c} = \{x \in \mathbb{R} \mapsto c\mathrm{e}^{x}\}}$$

Soit $f \in \mathcal{S}_{-1,c}$. On a $f'(x) = f(-x)$ pour tout x réel d'où f' dérivable et par dérivation, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$$

On en déduit $f = \lambda \cos + \mu \sin$ avec λ, μ réel et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) - f(-x) = (\mu - \lambda)(\sin(x) + \cos(x)) = 0$$

d'où $\lambda = \mu$ et avec $f(0) = c$, on conclut

$$\boxed{\mathcal{S}_{-1,c} = \{x \in \mathbb{R} \mapsto c(\cos(x) + \sin(x))\}}$$

2. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\frac{\lambda^{n(n-1)/2}}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n!}$$

et comme le rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est $+\infty$, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \lambda^{n(n-1)/2} \dfrac{x^n}{n!}$ est

$$\boxed{\mathrm{R} = +\infty}$$

On pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}$$

On a $\mathrm{S} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et par dérivation de série entière

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda^{n(n-1)/2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n(n+1)/2} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{S}(\lambda x)$$

Comme $\mathrm{S}(0) = 1$, on en déduit $\boxed{c\mathrm{S} \in \mathcal{S}_{\lambda,c}}$

3.(a) Le sens indirect est immédiat d'après le théorème fondamental d'intégration. Soit $f \in \mathcal{S}_{\lambda,c}$. On a f dérivable vérifiant $f(0) = x$ et $f'(x) = f(\lambda x)$ pour x réel. On en déduit f deux fois dérivable et donc de classe $\mathscr{C}^1$ en particulier. Il vient, toujours d'après le théorème fondamental d'intégration

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = c + \int_0^x f(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, pour $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a

$$\boxed{f \in \mathcal{S}_{\lambda,c} \iff \mathrm{T}(f) = f \quad \text{avec} \quad \mathrm{T}(f) : x \mapsto c + \int_0^x f(\lambda t)\,\mathrm{d}t}$$

3.(b) Soit $f \in \mathcal{S}_{\lambda,c}$. Sans difficulté, on vérifie que $g = f - c\mathrm{S} \in \mathcal{S}_{\lambda,0}$. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \int_0^x g(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

On pose $\qquad \forall a \geqslant 0 \qquad \mathrm{M}(a) = \|g\|_{\infty,[-a\,;a]}$

La fonction M est croissante sur $[0\,;+\infty[$. Soit $a \geqslant 0$. Pour $x \in [-a\,;a]$, il vient par inégalité triangulaire

$$|g(x)| = \left|\int_0^x g(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |x|\,\mathrm{M}(|\lambda|\,a) \leqslant a\mathrm{M}(|\lambda|\,a)$$

d'où $\qquad \forall a \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{M}(a) \leqslant a\mathrm{M}(|\lambda|\,a) \leqslant a\mathrm{M}(a)$

On en déduit $\qquad \forall a \in [0\,;1[\qquad \mathrm{M}(a) = 0$

Puis, par récurrence, on obtient pour $a \geqslant 0$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \mathrm{M}(a) \leqslant a^n\mathrm{M}(|\lambda|^n\,a)$$

Or, on a $|\lambda|^n\,a \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où $|\lambda|^n\,a \in [0\,;1[$ pour n assez grand et par conséquent $\mathrm{M}(a) = 0$ pour $a \geqslant 0$ autrement dit $g = 0$ ce qui prouve $f = c\mathrm{S}$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{S}_{\lambda,c} \text{ est le singleton } c\mathrm{S}.}$$

Remarque : Difficile de savoir si c'est la démarche attendue par le concepteur ... On n'utilise pas du tout l'opérateur T de la question précédente.

Variante : La démarche exposée précédemment n'utilise que des résultats de première année. On peut procéder différemment en montrant que si $g \in \mathcal{S}_{\lambda,0}$, alors la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant $g^{(n)}(x) = \lambda^{n(n-1)/2}f(\lambda^n x)$ pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$ et en montrant que la fonction est développable en série entière en zéro (avec l'inégalité de Taylor-Lagrange) puis en concluant à sa nullité.

Exercice 7 (Centrale 2025)

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle discrète et A un événement non négligeable. On pose

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A}) = \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}(\mathrm{X} = x|\mathrm{A})$$

1. Montrer que si $\mathrm{X} \in \mathrm{L}^1$, alors la quantité $\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{A})$ est bien définie.
2. Soient $(\mathrm{A}_n)_n$ un système complet d'événements et $(a_n)_n$ une suite réelle. On pose $\mathrm{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\mathbb{1}_{\mathrm{A}_n}$. Montrer que S est une variable aléatoire réelle discrète et

$$\mathrm{S} \in \mathrm{L}^1 \iff \sum |a_n|\,\mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \text{ converge}$$

3. On suppose $X \in L^1$ et soit Y variable aléatoire réelle discrète telle que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$ pour tout $y \in Y(\Omega)$. On pose

$$\mathbb{E}(X|Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{E}(X|Y = y) \mathbb{1}_{\{Y=y\}}$$

   (a) Montrer $$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$$

   (b) On suppose X et Y dans L^2 et $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ ainsi que $\mathbb{E}(Y|X) = X$. Montrer que $X = Y$ presque sûrement.

Corrigé : 1. Soit $x \in X(\Omega)$. On a

$$0 \leqslant |x| \, \mathbb{P}(X = x|A) = |x| \, \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \leqslant |x| \, \frac{\mathbb{P}(X = x)}{\mathbb{P}(A)}$$

Par comparaison, on en déduit la sommabilité de $(x\mathbb{P}(X = x|A))_{x \in X(\Omega)}$ et on conclut

$$\boxed{\text{L'espérance conditionnelle } \mathbb{E}(X|A) \text{ est bien définie pour } X \in L^1.}$$

2. On a $\displaystyle\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega$. Soit $\omega \in \Omega$. On dispose d'un unique n entier tel que $\omega \in A_n$ d'où $S(\omega) = a_n$. Ainsi, on a $S(\Omega) \subset \{a_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ ensemble au plus dénombrable. Pour n entier, on a

$$\{S = a_n\} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N} \ | \ a_k = a_n} A_k \in \mathscr{A}$$

On en déduit que S est bien une variable aléatoire réelle discrète. Puis, d'après le théorème de sommation par paquets pour une famille à termes positifs avec le recouvrement disjoint $(a^{-1}(\{s\}))_{s \in S(\Omega)}$ de $\mathbb{N}$, il vient

$$\begin{aligned}
S \in L^1 &\iff \sum_{s \in S(\Omega)} |s| \, \mathbb{P}(S = s) < +\infty \\
&\iff \sum_{s \in S(\Omega)} |s| \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \ | \ a_n = s} \mathbb{P}(A_n) \right) < +\infty \\
&\iff \sum_{s \in S(\Omega)} \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \ | \ a_n = s} |a_n| \, \mathbb{P}(A_n) \right) < +\infty \\
S \in L^1 &\iff \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \, \mathbb{P}(A_n) < +\infty
\end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{S \in L^1 \iff \sum |a_n| \, \mathbb{P}(A_n) \text{ converge}}$$

Remarque : Si $S \in L^1$, on a par sommation par paquets :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{s \in S(\Omega)} s\mathbb{P}(S = s) = \sum_{s \in S(\Omega)} \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \ | \ a_n = s} a_n \mathbb{P}(A_n) \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbb{P}(A_n)$$

3.(a) Par inégalité triangulaire, on a

$$\forall y \in Y(\Omega) \qquad |\mathbb{E}(X|Y = y)| \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \, \mathbb{P}(X = x|Y = y)$$

Ainsi, dans $[\, 0 \, ; +\infty \,]$, on trouve avec le théorème de Fubini pour des familles à termes positifs

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in Y(\Omega)} |\mathbb{E}(X|Y = y)| \, \mathbb{P}(Y = y) &\leqslant \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \, \mathbb{P}(X = x|Y = y) \right) \mathbb{P}(Y = y) \\
&\leqslant \sum_{y \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \, \mathbb{P}(X = x, Y = y) \right) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \, \mathbb{P}(X = x) < +\infty
\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y}) \in \mathrm{L}^1$ et par application de la remarque faite précédemment, on obtient avec le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y})) &= \mathbb{E}\left(\sum_{y\in\mathrm{Y}(\Omega)} \mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y}=y)\mathbb{1}_{\{\mathrm{Y}=y\}}\right) \\
&= \sum_{y\in\mathrm{Y}(\Omega)} \mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y}=y)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y) \\
&= \sum_{y\in\mathrm{Y}(\Omega)} \left(\sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}(\mathrm{X}=x|\mathrm{Y}=y)\right)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y) \\
\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y})) &= \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x\left(\sum_{y\in\mathrm{Y}(\Omega)} \mathbb{P}(\mathrm{X}=x,\mathrm{Y}=y)\right) = \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} x\mathbb{P}(\mathrm{X}=x)
\end{aligned}$$

On conclut $\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathrm{X}|\mathrm{Y})) = \mathbb{E}(\mathrm{X})}$

3.(b) On commence par établir la linéarité de l'espérance conditionnelle :

Lemme 1. *Soit α réel et X, Y, Z des variables aléatoires réelles discrètes dans L^1 avec $\mathbb{P}(\mathrm{X}=x) > 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}(\Omega)$. On a*

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}+\alpha\mathrm{Z}|\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}) + \alpha\mathbb{E}(\mathrm{Z}|\mathrm{X})$$

Démonstration. On note $\mathrm{U} = \mathrm{Y}+\alpha\mathrm{Z}$. On a

$$\mathbb{E}(\mathrm{Y}+\alpha\mathrm{Z}|\mathrm{X}) = \mathbb{E}(\mathrm{U}|\mathrm{X}) = \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{E}(\mathrm{U}|\mathrm{X}=x)\mathbb{1}_{\{\mathrm{X}=x\}}$$

Puis, pour $x \in \mathrm{X}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{U}|\mathrm{X}=x) &= \sum_{u\in\mathrm{U}(\Omega)} u\mathbb{P}(\mathrm{U}=u|\mathrm{X}=x) \\
&= \sum_{u\in\mathrm{U}(\Omega)} \left(\sum_{(y,z)\in\mathrm{Y}(\Omega)\times\mathrm{Z}(\Omega)\ |\ y+\alpha z=u} u\mathbb{P}(\mathrm{Y}+\alpha\mathrm{Z}=u,\mathrm{Y}=y,\mathrm{Z}=z|\mathrm{X}=x)\right) \\
\mathbb{E}(\mathrm{U}|\mathrm{X}=x) &= \sum_{u\in\mathrm{U}(\Omega)} \left(\sum_{(y,z)\in\mathrm{Y}(\Omega)\times\mathrm{Z}(\Omega)\ |\ y+\alpha z=u} (y+\alpha z)\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y,\mathrm{Z}=z|\mathrm{X}=x)\right)
\end{aligned}$$

En particulier, avec le recouvrement disjoint

$$\mathrm{Y}(\Omega)\times\mathrm{Z}(\Omega) = (\{(y,z)\in\mathrm{Y}(\Omega)\times\mathrm{Z}(\Omega)\ |\ y+\alpha z=u\})_{u\in\mathrm{U}(\Omega)}$$

on a par sommation par paquets

$$\begin{aligned}
\sum_{u\in\mathrm{U}(\Omega)} \left(\sum_{(y,z)\in\mathrm{Y}(\Omega)\times\mathrm{Z}(\Omega)\ |\ y+\alpha z=u} y\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y,\mathrm{Z}=z|\mathrm{X}=x)\right) &= \sum_{(y,z)\in\mathrm{Y}(\Omega)\times\mathrm{Z}(\Omega)} y\mathbb{P}(\mathrm{Y}=y,\mathrm{Z}=z|\mathrm{X}=x) \\
&= \sum_{y\in\mathrm{Y}(\Omega)} y\mathbb{P}(\mathrm{Y}=z|\mathrm{X}=x) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}=x)
\end{aligned}$$

et de même pour l'autre terme. On en déduit

$$\forall x\in\mathrm{X}(\Omega) \qquad \mathbb{E}(\mathrm{Y}+\alpha\mathrm{Z}|\mathrm{X}=x) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}=x) + \alpha\mathbb{E}(\mathrm{Z}|\mathrm{X}=x)$$

et le résultat suit par sommation. □

On a $(\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2 \in \mathrm{L}^1$ puis, d'après le résultat de la question précédente

$$\mathbb{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}((\mathrm{X}-\mathrm{Y})^2|\mathrm{X})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathrm{X}^2-2\mathrm{XY}+\mathrm{Y}^2|\mathrm{X}))$$

On montre le lemme suivant :

Lemme 2. *Soient* X, Y *des variables aléatoires réelles discrètes dans* L^1 *et* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que* $f(\mathrm{X})\mathrm{Y}$ *est dans* L^1. *On suppose* $\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathrm{X}(\Omega)$. *On a*

$$\forall x_0 \in \mathrm{X}(\Omega) \qquad \mathbb{E}(f(\mathrm{X})\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x_0) = f(x_0)\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x_0)$$

puis

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X})\mathrm{Y}|\mathrm{X}) = f(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$$

Démonstration. On note $\mathrm{Z} = f(\mathrm{X})\mathrm{Y}$. On a

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X})\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x_0) = \sum_{z \in \mathrm{Z}(\Omega)} \mathbb{P}(f(\mathrm{X})\mathrm{Y} = z|\mathrm{X} = x_0)$$

Pour $z \in \mathrm{Z}(\Omega)$, on décompose

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(f(\mathrm{X})\mathrm{Y} = z|\mathrm{X} = x_0) &= \sum_{(x,y) \in \mathrm{X}(\Omega) \times \mathrm{Y}(\Omega) \;|\; f(x)y = z} \mathbb{P}(f(\mathrm{X})\mathrm{Y} = z, \mathrm{X} = x, \mathrm{Y} = y|\mathrm{X} = x_0) \\ &= \sum_{y \in \mathrm{Y}(\Omega) \;|\; f(x_0)y = z} \mathbb{P}(f(x_0)y = z, \mathrm{Y} = y|\mathrm{X} = x_0)\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(\mathrm{X})\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x_0) &= \sum_{z \in \mathrm{Z}(\Omega)} z \left(\sum_{y \in \mathrm{Y}(\Omega) \;|\; f(x_0)y = z} \mathbb{P}(f(x_0)y = z, \mathrm{Y} = y|\mathrm{X} = x_0) \right) \\ &= \sum_{z \in \mathrm{Z}(\Omega)} \left(\sum_{y \in \mathrm{Y}(\Omega) \;|\; f(x_0)y = z} f(x_0)y\mathbb{P}(\mathrm{Y} = x|\mathrm{X} = x_0) \right)\end{aligned}$$

Et par sommation pas paquets avec le recouvrement disjoint

$$\mathrm{Y}(\Omega) = (y \in \mathrm{Y}(\Omega) \mid f(x_0)y = z)_{z \in \mathrm{Z}(\Omega)}$$

on obtient

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X})\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x_0) = f(x_0) \sum_{y \in \mathrm{Y}(\Omega)} y\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y|\mathrm{X} = x_0) = f(x_0)\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x_0)$$

puis

$$\mathbb{E}(f(\mathrm{X})\mathrm{Y}|\mathrm{X}) = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} \mathbb{E}(f(\mathrm{X})\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x)\mathbb{1}_{\{\mathrm{X}=x\}} = \sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} f(x)\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X} = x)\mathbb{1}_{\{\mathrm{X}=x\}} = f(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$$

□

Par application du lemme précédent, il vient

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}^2|\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 \qquad \mathbb{E}(2\mathrm{XY}|\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X})$$

et par conséquent

$$\mathbb{E}((\mathrm{X} - \mathrm{Y})^2) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\mathbb{E}(\mathrm{Y}|\mathrm{X}) + \mathbb{E}(\mathrm{Y}^2|\mathrm{X})) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}^2 + \mathbb{E}(\mathrm{Y}^2|\mathrm{X})) = \mathbb{E}(\mathrm{Y}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{X}^2)$$

et en échangeant les rôles, on trouve

$$\mathbb{E}((\mathrm{X} - \mathrm{Y})^2) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^2) - \mathbb{E}(\mathrm{Y}^2)$$

Ainsi

$$\mathbb{E}((\mathrm{X} - \mathrm{Y})^2) = 0$$

On conclut $\boxed{\text{Les variables X et Y sont égales presque sûrement.}}$

Exercice 8 (ENS 2025)

Soient A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\operatorname{rg}(AB - BA) = 1$. Montrer que les matrices A et B sont co-trigonalisables.

Corrigé : On note $C = AB - BA$. Quitte à remplacer A par $A - \lambda I_n$ avec $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, on suppose $A \notin GL_n(\mathbb{C})$. Montrons que Ker A ou Im A est stable par B. On a nécessairement $A \neq 0$ d'où $\operatorname{Im} A \neq \{0\}$ et $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$. Supposons Ker A pas stable par B. On dispose donc de $X \in \operatorname{Ker} A$ tel que $BX \notin \operatorname{Ker} A$, autrement dit $AX = 0$ et $ABX \neq 0$. Il s'ensuit

$$CX = ABX - BAX = ABX \neq 0$$

Par conséquent, on a
$$\operatorname{Im} C = \operatorname{Vect}(ABX)$$

On en déduit que pour tout $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il existe un scalaire $\mu(Y)$ tel que

$$CY = ABY - BAY = \mu(Y)ABX$$

d'où
$$BAY = AB(Y - \mu(Y)X) \in \operatorname{Im} A$$

ce qui prouve que le sev Im A est stable par B. On dispose dans tous les cas d'un sev F non réduit à $\{0\}$ stable par A et B. On peut donc procéder par récurrence en supposant le résultat vrai pour des matrices d'ordre $< n$. En considérant P matrice de passage de la base canonique vers une base obtenue par complétion d'une base de F, il vient

$$A' = P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0 & A_3 \end{array}\right) \qquad B' = P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline 0 & B_3 \end{array}\right)$$

et
$$AB - BA = C = C \iff A'B' - B'A' = C'$$

avec $C' = PCP^{-1}$ qui est également de rang égal 1. On trouve

$$A'B' - B'A' = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 - B_1A_1 & * \\ \hline 0 & A_3B_3 - B_3A_3 \end{array}\right)$$

Les matrices $A_1B_1 - B_1A_1$ et $A_3B_3 - B_3A_3$ sont extraites de C' donc de rang $\leqslant 1$. Si l'une est de rang nul, alors les matrices concernées sont trigonalisables et commutent donc sont cotrigonalisables d'après un résultat classique (à savoir refaire). Sinon, elles sont de rang égal à 1 et il suffit d'invoquer l'hypothèse de récurrence. En combinant les changements de base, on obtient l'hérédité et on conclut

$$\boxed{\text{Les matrices A et B sont cotrigonalisables.}}$$