Exercice 1 (Mines-Telecom 2024)

Soit $n > 2$ entier et $\mathrm{A} = \big(\sin(i+j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A})$ et $\det(\mathrm{A})$. On pourra considérer les colonnes $\mathrm{U} = \big(\cos(i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $\mathrm{V} = \big(\sin(i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Corrigé : On a $\forall (i,j) \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]^2 \qquad \sin(i+j) = \sin(i)\cos(j) + \sin(j)\cos(i)$

d'où
$$\mathrm{A} = \mathrm{U}\mathrm{V}^\top + \mathrm{V}\mathrm{U}^\top$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Il vient
$$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{AX} = \langle \mathrm{V},\mathrm{X}\rangle\, \mathrm{U} + \langle \mathrm{U},\mathrm{X}\rangle\, \mathrm{V} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U},\mathrm{V})$$

d'où $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) \leqslant 2$. La famille (U,V) est libre. En effet, si on considère le déterminant extrait sur les deux premières lignes de la matrice $(\mathrm{U}|\mathrm{V})$, on obtient
$$\begin{vmatrix} \cos(1) & \sin(1) \\ \cos(2) & \sin(2) \end{vmatrix} = \cos(1)\sin(2) - \sin(1)\cos(2) = \sin(1) \neq 0$$

puisque $1 \in \,]\,0\,;\pi\,[$. On en déduit
$$\mathrm{AX} = 0 \iff \mathrm{X} \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U},\mathrm{V})^\perp$$

ce qui prouve $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U},\mathrm{V})^\perp$. Or, on a $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U},\mathrm{V}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}\,(\mathrm{U},\mathrm{V})^\perp$ et on en déduit avec le théorème du rang
$$\boxed{\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}) = 2 \quad \text{et} \quad \det(\mathrm{A}) = 0}$$

Exercice 2 (Mines-Telecom 2025)

On pose $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_n = \int_1^{\mathrm{e}} \ln(t)^n \, \mathrm{d}t$$

1. Déterminer la limite de $(\mathrm{I}_n)_n$.
2. Montrer $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)\mathrm{I}_n$$

   En déduire un équivalent simple de I_n pour $n \to +\infty$.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de I_n pour $n \to +\infty$.

Corrigé : 1. On a $t \mapsto \ln(t)^n \in \mathscr{C}_{pm}([\,1\,;\mathrm{e}\,],\mathbb{R})$ pour n entier puis $\ln(t)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ pour $t \in [\,1\,;\mathrm{e}\,[$ et $0 \leqslant \ln(t) \leqslant 1$. Par convergence dominée, on conclut

$$\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

2. Soit n entier. On intègre par parties

$$\mathrm{I}_{n+1} = [t\ln(t)^{n+1}]_1^{\mathrm{e}} - (n+1)\int_1^{\mathrm{e}} \ln(t)^n \, \mathrm{d}t$$

Ainsi $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)\mathrm{I}_n}$$

On en déduit $$\mathrm{I}_n = \frac{1}{n+1}(\mathrm{e} + \mathrm{o}(1))$$

On conclut $$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{n}}$$

3. Ainsi, on a $$e - (n+1)\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{e}}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

d'où $$\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{e}}{n+1} - \frac{\mathrm{e}}{n(n+1)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}$$

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit E espace euclidien.

1. Soit A sev de E. Montrer $$(A^{\perp})^{\perp} = A$$
2. Soient F et G des sev de E.

   (a) Montrer $$(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$$

   (b) Montrer $$(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$$

Corrigé : Exercice 77 CCPINP 2025

Exercice 4 (CCINP 2025)

On pose

$$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad f(x) = 2x(1-x) \quad \text{puis} \quad g_0 = f \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad g_{n+1} = g_n \circ f$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_n$ converge simplement vers une fonction g sur $[\,0\,;1\,]$. La convergence est-elle uniforme ?
2. Soit $a \in \left]\,0\,;\dfrac{1}{2}\right[$. Montrer que la suite $(g_n)_n$ converge uniformément sur $[\,a\,;1-a\,]$.

Corrigé : 1. On a $g_n(0) = g_n(1) = 0$ pour tout n entier. Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$. On note $u_n = g_n(x)$ pour n entier. On a $f([\,0\,;1\,]) \subset \left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ d'où $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $\left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$. Comme $f(x) \geqslant x$ pour $x \in \left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ croît et comme elle est majorée, elle converge par limite monotone. Comme $u_0 = x > 0$, la suite $(u_n)_n$ converge vers l'unique point fixe non nul de f, c'est-à-dire $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$ et par conséquent

$$\boxed{g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{CS}} g \quad \text{avec} \quad g : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{0,1\} \\ \dfrac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}}$$

Par composition, on a $g_n \in \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ et $g \notin \mathscr{C}^0([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. On en déduit qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[\,0\,;1\,]$.

2. Soit $a \in \left]\,0\,;\dfrac{1}{2}\right[$. On a $f([\,a\,;1-a\,]) = \left[\,a\,;\dfrac{1}{2}\right]$. Ainsi, pour n entier non nul, il vient

$$\begin{aligned} \|g_n - g\|_{\infty,[\,a\,;1-a\,]} &= \operatorname*{Sup}_{x\in[\,a\,;1-a\,]} |g_n(x) - g(x)| \\ &= \operatorname*{Sup}_{x\in[\,a\,;1-a\,]} |g_{n-1}(f(x)) - g(f(x))| = \operatorname*{Sup}_{t\in[\,a\,;1/2\,]} |g_{n-1}(t) - g(t)| = \|g_{n-1} - g\|_{\infty,[\,a\,;1/2\,]} \end{aligned}$$

La suite g_n est une composée de fonctions croissantes sur $\left]\,0\,;\dfrac{1}{2}\right]$ donc est croissante et par conséquent

$$\|g_n - g\|_{\infty,[\,a\,;1/2\,]} = (g - g_n)(a) = \frac{1}{2} - g_n(a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (g_n)_n \text{ converge uniformément sur } [\,a\,;1-a\,] \text{ avec } a \in \left]\,0\,;\dfrac{1}{2}\right[.}$$

Exercice 5 (Centrale 2021)

Soit $z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ avec $z^\top = (z_1, \ldots, z_n)$. On définit $\bar{z}^\top = \begin{pmatrix} \bar{z_1} & \ldots & \bar{z_n} \end{pmatrix}^\top$. On pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On pose $$\mathcal{H}(\mathrm{R}) = \left\{ \bar{z}^\top \mathrm{R}(\theta) z, (\theta, z) \in \mathbb{R} \times \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C}) \mid \bar{z}^\top z = 1 \right\}$$

1. Déterminer $\bar{z}^\top z$ en fonction des z_i.
2. (a) Écrire une fonction `R(t)` d'argument `t` un flottant qui renvoie la matrice $\mathrm{R}(t)$.
   (b) Écrire une fonction qui renvoie une matrice colonne aléatoire z de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ vérifiant $\bar{z}^\top z = 1$.
   (c) Soit θ réel. Afficher le graphe des affixes de $\bar{z}^\top \mathrm{R}(\theta) z$ pour 1000 tirages aléatoires de matrices colonnes z de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ vérifiant $\bar{z}^\top z = 1$. On pourra utiliser la fonction `scatter`. Commenter.

   On considère que le réel θ est fixé.
3. Déterminer le spectre complexe de $\mathrm{R}(\theta)$.
4. Montrer qu'il existe (e_1, e_2, e_3) base de vecteurs propres de $\mathrm{R}(\theta)$ telle que
$$\forall (i,j) \in [\![1\,;3]\!]^2 \qquad \bar{e_i}^\top e_j = \delta_{i,j}$$
5. Pour z_1, …, z_p dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on définit
$$\mathrm{Conv}(z_1, \ldots, z_p) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i z_i,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p \mid \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right\}$$
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Conv}(z_1, \ldots, z_p)$ est le plus petit convexe de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ contenant z_1, …, z_p.
   (b) Déterminer $\mathcal{H}(\mathrm{R}(\theta))$.
6. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Déterminer $\mathcal{H}(\mathrm{M})$.

Corrigé : 1. On trouve $$\boxed{\bar{z}^\top z = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i z_i = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}$$

2.(a) On saisit :

```
def R(t):
    return np.array([[1,0,0],[0,np.cos(t),-np.sin(t)],[0,np.sin(t),np.cos(t)]])
```

2.(b) On saisit :

```
def znorm():
    res=rd.randn(3)+1j*rd.randn(3)
    return res/np.sqrt(np.dot(res.conj(),res))
```

2.(c) On saisit :

```
N=1000
t=2*np.pi*rd.rand()
Rt=R(t)
for k in range(N):
    z=znorm()
    tirage=np.dot((z.conj()).T,np.dot(Rt,z))
    plt.scatter(tirage.real,tirage.imag)
plt.show()
```

On observe :

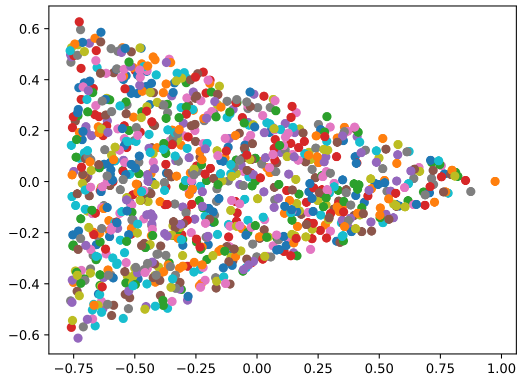

FIGURE 1 – Tirages de $\bar{z}^\top \mathrm{R}(\theta) z$

Les tirages semblent recouvrir un triangle dont le point d'affixe 1 est un des sommets et dont les deux autres sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

3. On a

$$\chi_{\mathrm{R}(\theta)} = \begin{vmatrix} \mathrm{X}-1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{X}-\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \mathrm{X}-\cos(\theta) \end{vmatrix} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2-2\cos(\theta)\mathrm{X}+1) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(\mathrm{X}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{Sp}\ \mathrm{R}(\theta) = \left\{1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right\}}$$

4. Si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, la matrice $\mathrm{R}(\theta)$ est diagonale et la base canonique convient. Sinon, la matrice $\mathrm{R}(\theta)$ admet 3 valeurs propres distinctes. On considère une base de vecteurs propres (u_1, u_2, u_3) et on pose

$$\forall i \in [\![1\,;3]\!] \qquad e_i = \frac{u_i}{\sqrt{\bar{u_i}^\top u_i}}$$

Par construction, on a $\bar{e_i}^\top e_i = 1$ pour tout $i \in [\![1\,;3]\!]$. Puis, pour $(i,j) \in [\![1\,;3]\!]^2$ avec $i \neq j$, il vient

$$\lambda_j \bar{e_i}^\top e_j = \bar{e_i}^\top \mathrm{R}(\theta) e_j = \overline{\mathrm{R}(-\theta) e_i}^\top e_j$$

Or, comme $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\mathrm{R}(\theta)) \subset \mathbb{U}$, on a $\mathrm{R}(-\theta) e_i = \bar{\lambda}_i e_i$ d'où

$$\lambda_j \bar{e_i}^\top e_j = \lambda_i \bar{e_i}^\top e_j = \lambda_i \bar{e_i}^\top e_j$$

On a $\lambda_i \neq \lambda_j$ et on conclut

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1\,;3]\!]^2 \qquad \bar{e_i}^\top e_j = \delta_{i,j}}$$

5.(a) On vérifie sans difficulté que $\mathrm{Conv}(z_1, \ldots, z_p)$ est un convexe contenant z_1, ..., z_p. Considérons C un convexe de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ contenant $z_1, \ldots, z_p$. On montre par récurrence sur k qu'il contient toute combinaison convexe $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i z_i$ avec les $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. L'initialisation pour $k = 1$ est immédiate. On suppose le résultat vrai au rang $k \leqslant p-1$. Soient λ_1, ..., λ_{k+1} des réels positifs tels que $\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$. Si $\lambda_{k+1} = 1$, le résultat est trivial. Supposons $\lambda_{k+1} < 1$. Par hypothèse de récurrence, on a $\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} z_i \in \mathrm{C}$ puis

$$(1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} z_i + \lambda_{k+1} z_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i z_i \in \mathrm{C}$$

ce qui clôt la récurrence et prouve $\mathrm{Conv}(z_1, \ldots, z_p) \subset \mathrm{C}$. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble } \mathrm{Conv}(z_1, \ldots, z_p) \text{ est le plus petit convexe de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ contenant } z_1, \ldots, z_p.}$$

5.(b) Soit $\mathrm{P} = \big(e_1|e_2|e_3\big)$. On a $\bar{\mathrm{P}}^\top \mathrm{P} = \big(\bar{z_i}^\top z_j\big)_{1\leqslant i,j\leqslant 3} = \big(\delta_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$. L'application $z \mapsto \mathrm{P}z$ réalise une permutation de l'ensemble des matrices $z \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ telles que $\bar{z}^\top z = 1$. Par conséquent, notant $\alpha(\mathrm{P}z)^\top = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}$ pour $z \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ telle que $\bar{z}^\top z = 1$, il vient

$$\bar{z}^\top \mathrm{R}(\theta) z = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + |\alpha_3|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

Ainsi $$\mathcal{H}(\mathrm{R}(\theta)) = \Big\{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + |\alpha_3|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ \alpha \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C}) \mid \bar{\alpha}^\top \alpha = 1\Big\}$$

On conclut

$$\boxed{\mathcal{H}(\mathrm{R}(\theta)) = \mathrm{Conv}(1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}$$

6. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. On dispose de $\mathrm{Q} \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ et de θ réel tels que

$$\mathrm{Q}^\top \mathrm{S} \mathrm{Q} = \mathrm{R}(\theta)$$

En procédant comme précédemment, on conclut

$$\boxed{\mathcal{H}(\mathrm{S}) = \mathrm{Conv}(\mathrm{Sp}_{\,\mathbb{C}}(\mathrm{S}))}$$

Exercice 6 (Centrale 2017)

1. On pose $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = \dfrac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$

   Tracer sur un même graphe les sommes partielles de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2n}$.
   Quelles conjectures peut-on émettre ?
   (On pourra approcher R_n par une somme à 100 termes.)

   À présent, on considère $(a_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $]\,0\,;+\infty\,[$ telle que $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge. On pose $\mathrm{R}_{=} \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ pour n entier.

2. Montrer $\qquad \forall n \geqslant 1 \qquad \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \leqslant 2\left(\sqrt{\mathrm{R}_n} - \sqrt{\mathrm{R}_{n+1}}\right)$

   En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}}$.

3. Soit m et n deux entiers tels que $1 \leqslant m \leqslant n$. Montrer
$$\sum_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant 1 - \frac{\mathrm{R}_{n+1}}{\mathrm{R}_m}$$
   En déduire la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$.

4. Montrer qu'il existe $\alpha \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ tel que :
   — Pour tout $\beta \in\,]\,0\,;\alpha\,[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^\beta}$ converge ;
   — Pour tout $\beta \in\,]\,\alpha\,;+\infty\,[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^\beta}$ diverge.

5. Donner la valeur de α dans le cas $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def a(n):
    return 1/n**2

def R(n):
    return sum([a(k) for k in range(n+1,n+1001)])

tn=range(1,100)
u1=[a(n+1)/R(n) for n in tn]
u2=[a(n+1)/np.sqrt(R(n)) for n in tn]
u3=[1/(2*n) for n in tn]
t1=[sum(u1[:n+1]) for n in tn]
t2=[sum(u2[:n+1]) for n in tn]
t3=[sum(u3[:n+1]) for n in tn]

plt.plot(tn,t1,tn,t2,tn,t3)
plt.legend(['q1','q2','q3']);plt.grid();plt.show()
```

On observe :

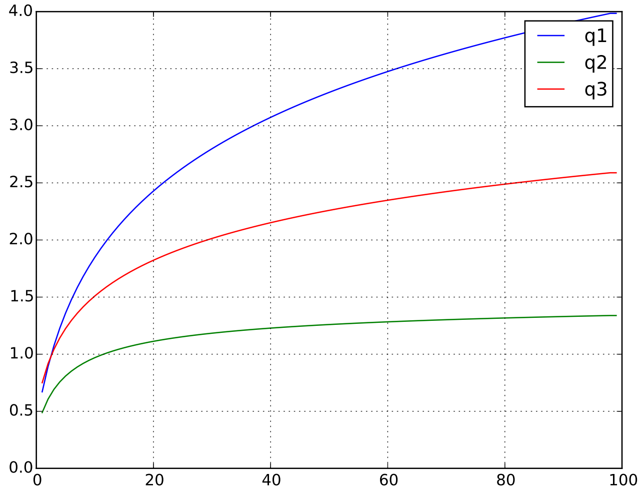

FIGURE 2 – Tracé des sommes partielles

On conjecture $\boxed{\text{La série } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \text{ converge et } \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n} \text{ diverge.}}$

2. Soit n entier non nul. On a $\dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} = \dfrac{\mathrm{R}_n - \mathrm{R}_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \leqslant \displaystyle\int_{\mathrm{R}_{n+1}}^{\mathrm{R}_n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$

Ainsi $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \dfrac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \leqslant 2\left(\sqrt{\mathrm{R}_n} - \sqrt{\mathrm{R}_{n+1}}\right)}$

La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} 2\left(\sqrt{\mathrm{R}_n} - \sqrt{\mathrm{R}_{n+1}}\right)$ est téléscopique avec $\sqrt{\mathrm{R}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où sa convergence. Par comparaison de séries à termes positifs, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\sqrt{\mathrm{R}_n}} \text{ converge.}}$$

3. Soit m et n deux entiers tels que $1 \leqslant m \leqslant n$. La suite $(\mathrm{R}_n)_{n\geqslant 1}$ décroît. Ainsi, on a

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant \sum_{i=m}^{n} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_m} = \frac{\mathrm{R}_m - \mathrm{R}_{n+1}}{\mathrm{R}_m}$$

D'où $\boxed{\forall 1 \leqslant m \leqslant n \qquad \sum\limits_{i=m}^{n} \dfrac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant 1 - \dfrac{\mathrm{R}_{n+1}}{\mathrm{R}_m}}$

Faisant tendre $n \to +\infty$, on a dans $[\,0\,; +\infty\,]$ avec le point de vue des familles sommables à termes positifs

$$\forall m \geqslant 1 \qquad \sum_{i=m}^{+\infty} \frac{a_{i+1}}{\mathrm{R}_i} \geqslant 1$$

Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$ converge, alors son reste serait de limite nulle ce qui est impossible d'après la minoration précédente. On conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n} \text{ diverge.}}$$

4. Considérons l'ensemble $\qquad \mathrm{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^x} \text{ converge} \right\}$

L'ensemble E est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ puisque $\dfrac{1}{2} \in \mathrm{E}$. D'après ce qui précède, on a $1 \notin \mathrm{E}$ et plus généralement, pour $x \geqslant 1$, avec $(\mathrm{R}_n)^x \leqslant \mathrm{R}_n$ pour n assez grand, il s'ensuit que $\dfrac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^x} \geqslant \dfrac{a_{n+1}}{\mathrm{R}_n}$ à partir d'un certain rang. On en déduit que E est majoré par 1 et on peut donc poser

$$\boxed{\alpha = \operatorname{Sup} \mathrm{E}}$$

Par définition d'une borne supérieure, les propriétés attendues sont immédiates.

5. Par comparaison série/intégrale, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{n}$$

Ainsi, pour $x \geqslant 0$, on a $\qquad \dfrac{a_{n+1}}{(\mathrm{R}_n)^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^x}{n^2} = \dfrac{1}{n^{2-x}}$

On en déduit $\qquad \boxed{\alpha = 1}$

Exercice 7 (Centrale 2024)

1. En utilisant une comparaison série/intégrale dont on rappellera le principe, déterminer un équivalent simple de $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \to +\infty$.
2. Un entier n non nul est dit sans facteur carré s'il n'existe pas de $k \geqslant 2$ tel que k^2 divise n. Montrer que pour tout entier i non nul, il existe un unique couple (m, a) avec a et m entiers non nuls et m sans facteurs carrés tels que $i = ma^2$.
3. Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1\,;\, n]\!]$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} & \mathrm{X} \end{pmatrix}$. Soit p_n la probabilité que M ne soit pas inversible. Montrer

$$p_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Corrigé : 1. Par décroissance $t \mapsto \frac{1}{t}$ continue par morceaux sur $[\,1\,;+\infty\,[$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Ainsi $$\boxed{\mathrm{H}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

2. Soit i entier non nul. On a

$$\begin{aligned} i = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(i)} &= \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{2\lfloor v_p(i)/2\rfloor + v_p(i) - 2\lfloor v_p(i)/2\rfloor} \\ &= \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\lfloor v_p(i)/2\rfloor}\right)^2 \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{v_p(i)-2\lfloor v_p(i)/2\rfloor} \end{aligned}$$

On observe $v_p(i) - 2\lfloor v_p(i)/2\rfloor \in \{0, 1\}$ pour tout $p \in \mathcal{P}$ d'où l'existence d'un couple (m, a) d'entiers non nuls avec m sans facteurs carrés tel que $i = ma^2$. Supposons $ma^2 = nb^2$ avec m, n entiers non nuls sans facteurs carrés et a, b entiers non nuls. Soit p un diviseur premier de m, autrement dit $v_p(m) = 1$. On a

$$v_p(ma^2) = 1 + 2v_p(a) = v_p(nb^2) = v_p(n) + 2v_p(b)$$

d'où $v_p(n) = 1$ par imparité de chaque terme. On en déduit $p|n$ et par symétrie des rôles, les entiers m et n ont les même facteurs premiers (de valuation égale à 1) et sont donc égaux et l'égalité du couple en résulte. On conclut

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}^* \quad | \quad \exists!(a, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \;:\; i = ma^2 \quad \text{avec} \quad m \text{ sans facteurs carrés}}$$

3. On a $$\{\mathrm{M} \text{ non inversible}\} = \{\det(\mathrm{M}) = 0\} = \{\mathrm{X}^2 = \mathrm{YZ}\}$$

d'où $$\mathbb{P}(\det(\mathrm{M}) = 0) = \sum_{(x,y,z)\in[\![1\,;\,n]\!]^3} \frac{1}{n^3} \operatorname{Card}\left\{(x, z, y) \in [\![1\,;\, n]\!]^3 \mid x^2 = yz\right\}$$

Soit $(x, y, z) \in [\![1\,;\, n]\!]^3$ tel que $x^2 = yz$. On dispose d'un unique couple (a, q) d'entiers non nuls tel que $y = a^2q$ avec q sans facteurs carrés et d'un unique couple (r, t) d'entiers non nuls tel que $z = rt^2$ avec r sans facteurs carrés. Comme yz est un carré, on a nécessairement $r = q$. En effet, on a

$$yz \text{ carré} \iff qr \text{ carré} \iff \forall p \in \mathcal{P} \quad v_p(q) + v_p(r) \text{ pair} \iff \forall p \in \mathcal{P} \quad v_p(q) = v_p(r)$$

la dernière équivalence découlant du fait que les p-valuations de q et r sont dans $\{0,1\}$. Le choix de a est un entier dans $[\![1\,;\, \lfloor\sqrt{n}\rfloor]\!]$ puis le choix de q est un entier dans $[\![1\,;\, \lfloor n/a^2\rfloor]\!]$ puis le choix de t avec $t^2 = \dfrac{z}{q}$ est un entier dans $[\![1\,;\, \left\lfloor\sqrt{n/q}\right\rfloor]\!]$. Ainsi, on a au plus

$$\sum_{a=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sum_{q=1}^{\lfloor n/a^2\rfloor}\sqrt{\frac{n}{q}}$$

choix possibles de triplets satisfaisant la condition voulue. Par comparaison série/intégrale, on a pour p entier non nul

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{p}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_{0}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n}$$

d'où $$\sum_{a=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sum_{q=1}^{\lfloor n/a^2\rfloor}\sqrt{\frac{n}{q}} \leqslant \sum_{a=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}2\sqrt{n}\sqrt{\left\lfloor\frac{n}{a^2}\right\rfloor} \leqslant \sum_{a=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}2\frac{n}{a} = 2n\mathrm{H}_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \leqslant 2n\left(1+\ln(\sqrt{n})\right)$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{P}(\det(\mathrm{M})=0) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}$$

Exercice 8 (ENS 2023)

Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $|a_i| \geqslant 2$ pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$.

1. Soit $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que la matrice A est inversible et que son déterminant a même signe que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$.

2. Montrer que le résultat précédent vaut encore si l'on remplace la condition $a_{i,j} = 1$ pour $|i-j| = 1$ par $|a_{i,j}| \leqslant 1$ pour $|i-j| = 1$.

Corrigé : 1. On note $\mathrm{D}(a_1, \ldots, a_n)$ le déterminant de A. Avec l'opération $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \dfrac{1}{a_1}\mathrm{L}_1$, on obtient

$$\mathrm{D}(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \mathrm{D}\left(a_2 - \frac{1}{a_1}, a_3, \ldots, a_n\right)$$

Sous réserve qu'on puisse définir la suite $(d_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec $d_1 = a_1$ et $d_{i+1} = a_{i+1} - \dfrac{1}{d_i}$ pour $i \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$, on obtient

$$\mathrm{D}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} d_i$$

En posant $\delta_i = \dfrac{d_i}{a_i}$ pour $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, il vient

$$\mathrm{D}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} \delta_i$$

avec $$\delta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1 \,;\, n-1]\!] \qquad \delta_{i+1} = 1 - \frac{1}{a_{i+1} a_i \delta_i}$$

On pose $$\forall i \in [\![1 \,;\, n-1]\!] \qquad f_i(x) = 1 - \frac{1}{a_{i+1} a_i x} \quad \text{et} \quad g_i(x) = x^2 - x + \frac{1}{a_{i+1} a_i}$$

Pour $i \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$, on n'a pas *a priori* l'inclusion $f_i(]\,0\,;+\infty\,[) \subset]\,0\,;+\infty\,[$ puisque si $a_{i+1} a_i > 0$, alors $f_i(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$. Il faut donc procéder plus finement.

Soit $i \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$. On suppose $a_{i+1} a_i > 0$. Pour $x > 0$, on a

$$f_i(x) \geqslant x \iff g_i(x) \leqslant 0$$

La fonction g_i est un trinôme de discriminant

$$\Delta_i = 1 - \frac{4}{a_{i+1} a_i} \geqslant 0$$

On pose $m_i = \dfrac{1 + \sqrt{\Delta_i}}{2}$ et on remarque sans difficulté $\dfrac{1}{2} \leqslant m_i < 1$. Si $a_{i+1} a_i < 0$, on pose simplement $m_i = 1$. On choisit ensuite $m = \underset{1 \leqslant i \leqslant n-1}{\mathrm{Min}}\, m_i$ qui vérifie notamment $\dfrac{1}{2} \leqslant m \leqslant 1$. Montrons pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$ l'implication

$$x \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad f_i(x) \geqslant m$$

On observe en premier lieu que $f_i(x)$ est bien défini pour $x \geqslant m > 0$. Supposons $a_{i+1}a_i < 0$, alors pour $x \geqslant m$, on a

$$f_i(x) = 1 - \frac{1}{a_{i+1}a_i x} \geqslant 1 \geqslant m$$

Supposons désormais $a_{i+1}a_i > 0$. Par croissance de f_i, on a

$$x \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad f_i(x) \geqslant f_i(m)$$

La motivation du choix de m va apparaître clairement. On a $m_i = f_i(m_i) \geqslant m_i$ et on souhaite pouvoir annoncer la même inégalité avec m en lieu et place de m_i. On a l'équivalence

$$f_i(m) \geqslant m \iff 0 \geqslant g_i(m)$$

Or, par choix de m, on a

$$\frac{1-\sqrt{\Delta_i}}{2} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant m \leqslant \frac{1+\sqrt{\Delta_i}}{2}$$

Le point m est donc entre les racines (pas forcément distinctes) de g_i d'où $g_i(m) \leqslant 0$ et par conséquent, on a bien

$$x \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad f_i(x) \geqslant f_i(m) \geqslant m$$

On construit alors proprement la suite $(\delta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On pose $\delta_1 = 1$ puis

$$\forall i \in [\![\, 1\,;\, n-1 \,]\!] \qquad \delta_{i+1} = f_i(\delta_i)$$

On a $\delta_1 \geqslant m$. Puis supposons $\delta_i \geqslant m$ pour $i \in [\![\, 1\,;\, n-1 \,]\!]$. La quantité $f_i(\delta_i)$ est bien définie puisque $\delta_i > 0$ et on a $\delta_{i+1} = f_i(\delta_i) \geqslant m$. Ainsi, on obtient

$$\det \mathrm{A} = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} \delta_i \quad \text{avec} \quad \prod_{i=1}^{n} |a_i| \geqslant 2^n \neq 0 \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \delta_i > 0$$

On conclut $\boxed{\text{La matrice A est inversible et } \det \mathrm{A} \text{ de même signe que } \prod_{i=1}^{n} a_i.}$

2. On note désormais

$$\mathrm{D}(a_1,\ldots,a_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \beta_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Avec l'opération $\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \dfrac{\beta_1}{a_1}\mathrm{L}_2$, on trouve

$$\mathrm{D}(a_1,\ldots,a_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = a_1 \mathrm{D}(a_2 - \frac{\alpha_1\beta_1}{a_1},\ldots,a_n,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_2,\ldots,\beta_{n-1})$$

et sous réserve de bonne définition, on obtient

$$\mathrm{D}(a_1,\ldots,a_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1},\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} \delta_i$$

avec $$\delta_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![\, 1\,;\, n-1 \,]\!] \qquad \delta_{i+1} = 1 - \frac{\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i\delta_i}$$

Il suffit alors de reprendre la même trame qu'à la question 1 en remplaçant $\dfrac{1}{a_{i+1}a_i}$ par $\dfrac{\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i}$ et la discussion sur le signe de $a_{i+1}a_i$ en discussion sur le signe de $\dfrac{\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i}$. Pour $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ et $\dfrac{\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i} > 0$, on trouve comme discriminant pour $g_i : x \mapsto x^2 - x + \dfrac{\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i}$

$$\Delta_i = 1 - \frac{4\alpha_i\beta_i}{a_{i+1}a_i} \geqslant 0$$

Le reste de l'étude est alors identique. On conclut

$$\boxed{\text{La matrice A est inversible et } \det \mathrm{A} \text{ de même signe que } \prod_{i=1}^{n} a_i.}$$

Exercice 9 (Mines-Telecom 2017)

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
2. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque $x \to 0$ et $x \to +\infty$.

Corrigé : 1. On pose $\quad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad u_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$

Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x^2}$ d'où la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ d'après le critère des équivalents pour des séries à termes positifs. Pour $a > 0$, on a

$$\|u_n\|_{\infty,[\,a\,;+\infty\,[} = \frac{1}{1+n^2a^2}$$

La convergence normale et donc uniforme s'en déduit. Et comme il s'agit d'une série de fonctions continues, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie et continue sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2x^2}$ est décroissante, positive, continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ et par comparaison série/intégrale, il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}$$

d'où
$$\left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}(tx)\right]_1^{+\infty} \leqslant f(x) \leqslant \left[\frac{1}{x}\operatorname{Arctan}(tx)\right]_0^{+\infty}$$

On en déduit
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{2x}}$$

En revanche, l'encadrement ne permet pas de conclure sur un équivalent pour $x \to +\infty$. Comme $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2x^2}$ pour tout n entier non nul, on pose

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad v_n(x) = x^2u_n(x) = \frac{x^2}{1+n^2x^2}$$

On a
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]\,0\,;+\infty\,[\qquad 0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2}$$

ce qui prouve la convergence normale et donc uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{n^2}$$

Ainsi, d'après le théorème de double limite, il vient

$$x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

On conclut
$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\zeta(2)}{x^2}}$$

Exercice 10 (Mines-Telecom 2023)

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $(X-1)^n Q + X^n P = 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(P_0, Q_0) \in \mathcal{S} \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$.
2. Décrire $\mathcal{S}$.

Corrigé : 1. On pose $\quad \Phi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{n-1}[X]^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{2n-1}[X] \\ (P, Q) \longmapsto (X-1)^n Q + X^n P \end{cases}$

L'application Φ est bien définie puisque pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$\deg (X-1)^n Q + X^n P \leqslant \max(\deg (X-1)^n Q, \deg X^n P) \leqslant 2n-1$$

et elle est linéaire par bilinéarité du produit. Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il vient

$$\Phi(P, Q) = 0 \iff (X-1)^n Q = -X^n P$$

On a $(X-1)^n \wedge X^n = 1$ et $X^n | (X-1)^n Q$ d'où $X^n | Q$ d'après le lemme de Gauss. Comme on a $\deg Q \leqslant n-1$, on en déduit $Q = 0$ puis $P = 0$ par intégrité ce qui prouve l'injectivité de Φ. Enfin, on observe

$$\dim \mathbb{R}_{n-1}[X]^2 = 2n = \dim \mathbb{R}_{2n-1}[X]$$

L'application Φ est linéaire injective entre deux espaces de même dimension et c'est par conséquent un isomorphisme. On en déduit que l'équation $\Phi(P, Q) = 1$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ et on conclut

$$\boxed{\text{Il existe un unique couple } (P_0, Q_0) \in \mathcal{S} \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^2.}$$

2. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. On a

$$\begin{aligned} (P, Q) \in \mathcal{S} &\iff (X-1)^n Q + X^n P = 1 \\ &\iff \begin{cases} (X-1)^n Q + X^n P = 1 \\ (X-1)^n Q_0 + X^n P_0 = 1 \end{cases} \iff (X-1)^n (Q - Q_0) = -X^n (P - P_0) \end{aligned}$$

Toujours d'après le lemme de Gauss, comme $X^n | (X-1)^n (Q - Q_0)$, il vient $X^n | (Q - Q_0)$ d'où $Q = Q_0 + X^n R$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$ et

$$-X^n (P - P_0) = (X-1)^n X^n R$$

d'où $P = P_0 - (X-1)^n R$. Ainsi, on a

$$\mathcal{S} \subset \{(P_0 - (X-1)^n R, Q_0 + X^n R), R \in \mathbb{R}[X]\}$$

et on vérifie l'inclusion réciproque sans difficulté. On conclut

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(P_0 - (X-1)^n R, Q_0 + X^n R), R \in \mathbb{R}[X]\}}$$

Exercice 11 (Centrale 2021)

Pour x réel, on pose sous réserve de convergence

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$$

et on considère l'équation différentielle sur $]\,0\,;+\infty\,[$

$$y'' + y = \frac{1}{x} \tag{E}$$

1. Déterminer les ensembles de définition de F et G.
2. Tracer la courbe de F.
3. Tracer la courbe de G en expliquant pourquoi la méthode naïve ne convient pas. Faire une conjecture concernant F et G.
4. Soit ϕ de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I ouvert et $x_0 \in \mathrm{I}$. À l'aide du développement limité de ϕ, exprimer $\phi''(x_0)$ comme limite d'une expression faisant intervenir $\phi(x_0+h)$ et $\phi(x_0-h)$.
5. En admettant que F soit de classe $\mathscr{C}^2$, vérifier numériquement qu'elle satisfait l'équation (E).
6. Montrer que F et G sont continues sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
7. Montrer que F et G sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.
8. Montrer que F et G sont solutions de (E) puis que F = G.
9. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [\,0\,;+\infty\,[\qquad f(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2} \qquad g(x,t) = \frac{\sin(t)}{x+t}$$

Pour x réel, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Pour $x < 0$, on a $1 \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}(f(x,t))$ avec $t \mapsto 1$ d'intégrale divergente d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ également par comparaison de fonctions positives. Pour $x \geqslant 0$, on a

$$\forall t \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x < 0$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ et une étude de convergence a donc du sens. On a $t \mapsto \dfrac{1}{x+t}$ et $t \mapsto 1 - \cos(t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec

$$-\frac{1-\cos(t)}{x+t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1-\cos(t)}{x+t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$

sont de même nature. La seconde converge puisque

$$\frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}(1) \quad \text{et} \quad \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On conclut $\boxed{\text{Les fonctions F et G sont définies sur } \mathbb{R}_+.}$

2. On saisit :

```
F=lambda x:integr.quad(lambda t:np.exp(-x*t)/(1+t**2),0,np.inf)[0]

tx=np.linspace(0,10,100)
tF=[F(x) for x in tx]
plt.plot(tx,tF)
plt.show()
```

On observe :

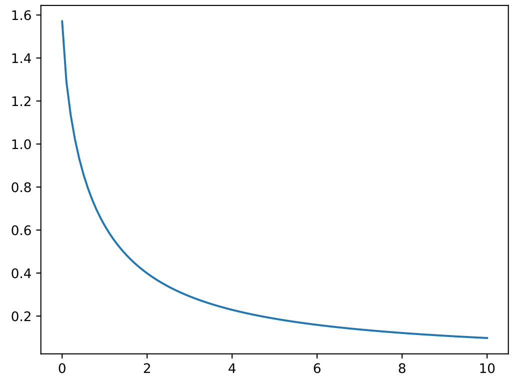

FIGURE 3 – Graphe de F

3. On saisit :

```
G=lambda x:integr.quad(lambda t:np.sin(t)/(x+t),0,np.inf)[0]

tG=[G(x) for x in tx]
plt.plot(tx,tG)
plt.show()
```

On obtient l'avertissement :

```
Warning (from warnings module):
  File "D:/DRIVE CPGE/ORAUX/CENTRALE2/EX023.py", line 18
    G=lambda x:integr.quad(lambda t:np.sin(t)/(x+t),0,np.inf)[0]
IntegrationWarning: The integral is probably divergent, or slowly convergent.
```

On peut raisonnablement imaginer que l'avertissement vient du fait que l'intégrande définissant G n'est pas intégrable. Il s'agit d'un cas d'intégrale semi-convergente. On code plutôt :

```
G=lambda x:integr.quad(lambda t:np.sin(t)/(x+t),0,100)[0]
```

et en superposant les graphes de F et G, on observe :

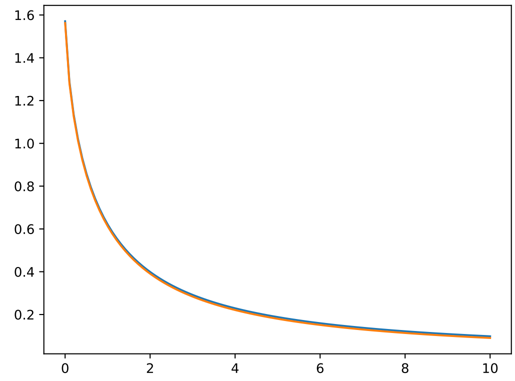

FIGURE 4 – Graphe de G

On conjecture $\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{G}}$

4. D'après le théorème de Taylor-Young, on a

$$\phi(x_0 + h) \underset{h \to 0}{=} \phi(x_0) + \phi'(x_0)h + \phi''(x_0)\frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^2)$$

$$\phi(x_0 - h) \underset{h \to 0}{=} \phi(x_0 - h) - \phi'(x_0)h + \phi''(x_0)\frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^2)$$

d'où $$\phi(x_0 + h) - 2\phi(x_0) + \phi(x_0 - h) = h^2\phi''(x_0) + \mathrm{o}(h^2)$$

Ainsi $$\boxed{\frac{\phi(x_0 + h) - 2\phi(x_0) + \phi(x_0 - h)}{h^2} \xrightarrow[h \to 0]{} \phi''(x_0)}$$

5. On saisit :

```
h=1e-4
tx=np.linspace(.1,10,100)
tdiff=[F(x)+(F(x+h)-2*F(x)+F(x-h))/h**2-1/x for x in tx]
plt.plot(tx,tdiff)
plt.show()
```

On observe :

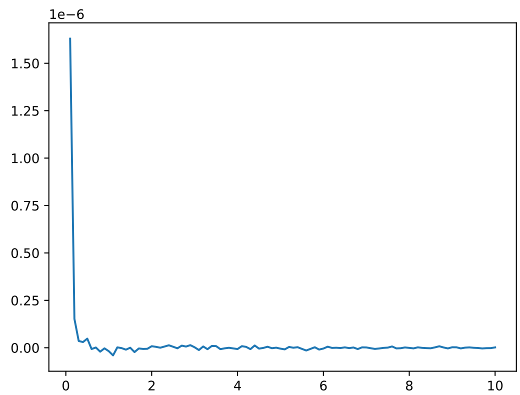

FIGURE 5 – Graphe d'une approximation de $x \mapsto \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x) - \dfrac{1}{x}$

La simulation numérique conforte l'idée que la fonction F satisfait l'équation (E).

6. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.
• Pour $x \geqslant 0$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Pour $t \geqslant 0$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad 0 \leqslant f(x,t) \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction φ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\mathrm{d}t = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. D'après l'intégration par parties réalisée à la première question, il vient pour $x \geqslant 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{1-\cos(t)}{x+t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Avec la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \left]\, 0\,; +\infty \,\right[\qquad 0 \leqslant \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1-\cos(t)}{t^2}$$

on établit sans difficulté la continuité de la nouvelle écriture de G et on conclut

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont définies, continues sur } \mathbb{R}_+.}$$

7. Une domination locale permet d'établir sans difficulté que $\mathrm{F} \in \mathscr{C}^2(\left]\, 0\,; +\infty \,\right[, \mathbb{R})$. Pour $x > 0$, on obtient par changement de variable

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(x)\sin(u) - \sin(x)\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

Les intégrales $\mathrm{A}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\mathrm{B}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ convergent (intégration par parties). Ainsi, par linéarité

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{G}(x) = \cos(x)\mathrm{A}(x) - \sin(x)\mathrm{B}(x)$$

Les intégrandes des fonctions A et B sont continues et même de classe $\mathscr{C}^1$ donc A et B sont de classe $\mathscr{C}^1$ avec A′ et B′ de classe $\mathscr{C}^1$ d'où A, B de classe $\mathscr{C}^2$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \left]\, 0\,; +\infty \,\right[.}$$

8. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 \mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

et avec $$\forall x > 0 \qquad \mathrm{A}'(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}'(x) = -\frac{\cos(x)}{x}$$

on trouve finalement

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G vérifient } y'' + y = \frac{1}{x} \text{ sur } \left]\, 0\,; +\infty \,\right[.}$$

La fonction F − G est donc solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$ et par conséquent, il existe a, b réels tels que $\mathrm{F} - \mathrm{G} = a\cos + b\sin$. Or, on a (convergence assurée)

$$\forall x > 0 \qquad 0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

et $\qquad \mathrm{G}(x) = \cos(x)\mathrm{A}(x)\sin(x)\mathrm{B}(x) \quad \text{avec} \quad \mathrm{A}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$

Par suite
$$\mathrm{F}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{G}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

donc la fonction $a\cos + b\sin$ admet une limite en $+\infty$ ce qui prouve $a = b = 0$. Ainsi, on a

$$\forall x > 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{G}(x)$$

Enfin, par continuité sur $\mathbb{R}_+$, il vient

$$\mathrm{F}(0) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{F}(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{G}(x) = \mathrm{G}(0)$$

Ainsi
$$\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{G}}$$

9. On a
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{G}(0) = \mathrm{F}(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Et on conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 12 (Centrale 2024)

Soit $\mathrm{E} = \{f \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R}) \mid f^2 \in \mathrm{L}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})\}$.

1. (a) Définir la notion de fonction intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

   (b) Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. Montrer que le produit fg est intégrable et en déduire que l'ensemble E est un $\mathbb{R}$-ev.

   On pose $$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} fg$$

2. (a) Montrer que $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ est un produit scalaire sur E.
   Soit $f \in \mathrm{E}$ avec f de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f'' \in \mathrm{E}$.

   (b) Montrer que $f' \in \mathrm{E}$.

   (c) Exprimer $\langle f',f'\rangle + \langle f,f''\rangle$, $\langle f,f'\rangle$, $\langle f',f''\rangle$ en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$.

3. On pose $$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \langle f,f\rangle & \langle f',f\rangle & \langle f'',f\rangle \\ \langle f,f'\rangle & \langle f',f'\rangle & \langle f'',f'\rangle \\ \langle f,f''\rangle & \langle f',f''\rangle & \langle f'',f''\rangle \end{pmatrix}$$

   Montrer que $\det(\mathrm{A}) \geqslant 0$ puis étudier le cas d'égalité.

Corrigé : 1.(a) Une fonction f est dite *intégrable* sur $[\,0\,;+\infty\,[$ si elle est continue par morceaux sur cet intervalle et d'intégrale absolument convergente sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

1.(b) Soit $(f,g) \in \mathrm{E}^2$. On a clairement $fg \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$0 \leqslant |fg| \leqslant \frac{1}{2}\left(f^2+g^2\right)$$

Ainsi $$\boxed{\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad fg \in \mathrm{L}^1([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})}$$

La fonction nulle est dans E. Soit $(f,g,\lambda) \in \mathrm{E}^2 \times \mathbb{R}$. On a $\lambda f + g \in \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R})$ puis

$$(\lambda f+g)^2 = \lambda^2 f^2 + 2\lambda f b + g^2$$

qui est intégrable sur $[\,0\,;+\infty\,[$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. On conclut

$$\boxed{\text{L'ensemble E est un sev du } \mathbb{R}\text{-ev } \mathscr{C}^0([\,0\,;+\infty\,[\,,\mathbb{R}).}$$

2.(a) L'application $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ est une forme symétrique, linéaire en la première variable par bilinéarité du produit et linéarité de l'intégrale car convergence. Pour $f \in \mathrm{E}$, on a

$$\langle f,f\rangle = \int_0^{+\infty} f^2 \geqslant 0$$

et si $\langle f,f\rangle = 0$, alors par continuité et positivé de l'intégrande f^2, il vient $f^2(t) = 0$ pour $t \geqslant 0$ d'où $f = 0_{\mathrm{E}}$. On conclut

$$\boxed{\text{L'application } (f,g) \mapsto \langle f,g\rangle \text{ est un produit scalaire sur E.}}$$

2.(b) Par intégration par parties, il vient pour $x \geqslant 0$

$$\int_0^x f'^2 = ff'(x) - ff'(0) - \int_0^x ff''$$

d'où $$ff'(x) = ff'(0) + \int_0^x ff'' + \int_0^x f'^2$$

On a ff'' intégrable sur $[0\,;+\infty[$ d'après le résultat de la question 1.(b) ce qui prouve que $x\mapsto\displaystyle\int_0^x ff''$ admet une limite finie pour $x\to+\infty$. La fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x f'^2$ est croissante et admet donc une limite, éventuellement infinie, pour $x\to+\infty$. Supposons $\displaystyle\int_0^x f'^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Alors, il s'ensuit $ff'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ d'où $ff'(x)\geqslant 1$ pour $x\geqslant \mathrm{A}$ avec $\mathrm{A}\geqslant 0$ et par intégration pour $x\geqslant \mathrm{A}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{A}}^x f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathrm{A}}^x\left(f^2(\mathrm{A})+\int_{\mathrm{A}}^t 2ff'(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \int_{\mathrm{A}}^x\left(f^2(\mathrm{A})+2(t-\mathrm{A})\right)\,\mathrm{d}t \geqslant (x-\mathrm{A})f^2(\mathrm{A})+(x-\mathrm{A})^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

ce qui contredit $f\in\mathrm{E}$. On conclut

$$\boxed{f'\in\mathrm{E}}$$

2.(c) D'après la relation

$$\forall x\geqslant 0\qquad ff'(x)=ff'(0)+\int_0^x ff''+\int_0^x f'^2$$

la fonction ff' admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Supposons $\ell\neq 0$, par exemple $\ell>0$. On dispose de $\mathrm{A}\geqslant 0$ tel que $ff'(x)\geqslant \ell/2$ pour $x\geqslant\mathrm{A}$ d'où pour $x\geqslant\mathrm{A}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{A}}^x f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathrm{A}}^x\left(f^2(\mathrm{A})+\int_{\mathrm{A}}^t 2ff'(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t\\ &\geqslant \int_{\mathrm{A}}^x\left(f^2(\mathrm{A})+\ell(t-\mathrm{A})\right)\,\mathrm{d}t \geqslant (x-\mathrm{A})f^2(\mathrm{A})+\frac{\ell}{2}(x-\mathrm{A})^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

ce qui contredit $f\in\mathrm{E}$. On en déduit

$$ff'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Ainsi $$\int_0^{+\infty} f'^2 = [ff']_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}ff'' = -ff'(0)-\int_0^{+\infty}ff''$$

c'est-à-dire $$\boxed{\langle f',f'\rangle+\langle f,f''\rangle=-f(0)f'(0)}$$

Comme $f\in\mathrm{E}$ et $f'\in\mathrm{E}$, la fonction ff' est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et par conséquent

$$x\mapsto\int_0^x ff'=\frac{1}{2}\left[f^2(x)-f^2(0)\right]$$

admet une limite finie pour $x\to+\infty$. On en déduit que f^2 admet une limite finie en $+\infty$ et par un raisonnement identique à précédemment, il vient $f^2(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Ainsi

$$\int_0^{+\infty}ff'=\left[\frac{1}{2}f^2\right]_0^{+\infty}$$

On peut appliquer exactement la même démarche à f' et f'' et on conclut

$$\boxed{\langle f,f'\rangle=-\frac{1}{2}f^2(0)\qquad\langle f',f''\rangle=-\frac{1}{2}f'(0)^2}$$

3. La matrice A est une matrice de Gram. On a $\mathrm{A}\in\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, diagonalisable d'après le théorème spectral, et pour $\mathrm{X}^\top=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, il vient

$$\mathrm{X}^\top\mathrm{AX}=\|xf+yf'+zf''\|^2\geqslant 0$$

ce qui prouve $\mathrm{A} \in \mathscr{S}_3^{+}(\mathbb{R})$ d'où $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{A}) \subset [\,0\,;+\infty\,[$ et par conséquent

$$\boxed{\det(\mathrm{A}) \geqslant 0}$$

Puis, on a $$\mathrm{X}^\top \mathrm{A} \mathrm{X} = 0 \iff xf + yf' + zf'' = 0$$

Par conséquent, on obtient

$$\det(\mathrm{A}) > 0 \iff \mathrm{A} \in \mathscr{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \iff (f, f', f'') \text{ libre}$$

On conclut $$\boxed{\det(\mathrm{A}) = 0 \iff (f, f', f'') \text{ liée}}$$

Remarque : On peut aller plus loin dans l'étude en écrivant la liaison de la famille (f, f', f'') et en résolvant l'équation différentielle associée avec distinction des cas.

Exercice 13 (Mines-Telecom 2017)

Soit n entier avec $n \geqslant 2$ et $\mathrm{B} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n, i \neq j} x_i x_j$$

1. Montrer que f admet un minimum m et un maximum M sur B.
2. Montrer que m et M ne sont pas atteints sur $\mathring{\mathrm{B}}$.
3. Montrer que $m = -1$ et $\mathrm{M} = n - 1$.

Corrigé : 1. L'ensemble B est un fermé borné d'un espace de dimension finie et c'est donc un compact. La fonction f est polynomiale donc continue sur le compact B et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ atteint ses bornes sur B.}}$$

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ car polynomiale. Si elle atteint ses extremums sur l'ouvert $\mathring{\mathrm{B}}$, alors il s'agit de points critiques. On trouve

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad \partial_k f(x) = 2 \sum_{i \in [\![1\,;n]\!] \smallsetminus \{k\}} x_i$$

Ainsi
$$\begin{aligned} \nabla f(x) = 0 &\iff \forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad \sum_{i \in [\![1\,;n]\!] \smallsetminus \{k\}} x_i = 0 \\ &\iff \forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad \sum_{i=1}^n x_i = x_k \iff x = 0 \end{aligned}$$

Or, on a $\quad \forall t > 0 \qquad f(t, t, 0, \ldots, 0) = 2t^2 > 0 \quad$ et $\quad f(t, -t, 0, \ldots, 0) = -2t^2 < 0$

ce qui prouve que l'unique point critique 0 n'est pas un extremum. On conclut

$$\boxed{\text{Les extremums de } f \text{ ne sont pas atteints sur } \mathring{\mathrm{B}}.}$$

3. On peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad f(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j - \sum_{i=1}^n x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

avec égalité si et seulement si x est colinéaire à $u = (1, \ldots, 1)$. On en déduit

$$\forall x \in \partial \mathrm{B} \qquad f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - 1 \leqslant n - 1 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right) = n - 1$$

Puis
$$\forall x \in \partial \mathrm{B} \qquad f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - 1 \geqslant -1 = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0\right)$$

On conclut
$$\boxed{m = -1 \quad \text{et} \quad \mathrm{M} = n - 1}$$

Remarque : Pour la majoration, on peut aussi invoquer l'inégalité de Jensen avec la convexité de $t \mapsto t^2$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = n^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \leqslant n^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Exercice 14 (Mines-Telecom 2017)

Conditions sur les réels a, b, c, d pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Corrigé : La matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ est triangulaire donc son spectre se lit sur sa diagonale. Si $d \notin \{1, 2\}$, la matrice A possède 3 valeurs propres distinctes et est d'ordre 3 d'où son caractère diagonalisable. Supposons $d = 1$. On a A diagonalisable si et seulement si $\dim \mathrm{E}_1(\mathrm{A}) = m_1(\mathrm{A}) = 2$. Puis, on trouve

$$\mathrm{A} - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et
$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} = 1 \iff ac - b = 0$$

Enfin, supposons $d = 2$. On a A diagonalisable si et seulement si $\dim \mathrm{E}_2(\mathrm{A}) = m_2(\mathrm{A}) = 2$. Puis, on trouve

$$\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et
$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3) = 1 \iff c = 0$$

On conclut

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{La matrice A est diagonalisable si et seulement si} \\ d \notin \{1, 2\} \text{ ou } d = 1 \text{ et } ac - b = 0 \text{ ou } d = 2 \text{ et } c = 0. \end{array}}$$

Exercice 15 (Centrale 2021)

On considère un pion placé initialement en 0 sur l'axe des entiers naturels. Celui-ci ne peut se déplacer que strictement à droite. On note Y_i la variable aléatoire qui mesure le déplacement réalisé à la i-ème étape. La suite $(\mathrm{Y}_i)_{i\geqslant 1}$ est supposée constituée de variables i.i.d. On note $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i$ pour tout n entier et on pose

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad f_i = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = i) \quad \text{et} \quad \forall t \in [\,0\,;1\,] \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i$$

On définit l'événement E_k par « Le pion atteint la case k » et on pose $u_k = \mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$ pour k entier. On a $u_0 = 1$.

1. On suppose que $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$.
   (a) Écrire une fonction `atteint(k)` d'argument `k` entier qui réalise une simulation du déplacement du pion et renvoie `True` si la case k est atteinte et `False` sinon.
   (b) Écrire une fonction `PE(k)` d'argument `k` entier qui renvoie une approximation de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$. La comparer à $\dfrac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}$ pour différentes valeurs de k.
   (c) Reprendre les questions précédentes avec $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$.
2. Soit k entier. Exprimer l'événement E_k à l'aide des variables S_n.
3. Soit k entier et j entier non nul. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\})$.
   En déduire une expression sommatoire de $\mathbb{P}(\mathrm{E}_k)$.
4. Pour t réel, on pose $u(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$.
   Montrer que u est défini sur $[\,0\,;1\,[$ puis établir
   $$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1 - f(t)}$$
5. En déduire les u_k si $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$ puis si $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$.
6. On suppose que Y_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs et que les k entiers non nuls tels que $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que
   $$u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}$$

Corrigé : 1.(a) On saisit :

```
p=.27

def ber(p):
    return int(rd.rand()<p)

def atteint(k):
    res=0
    while res<k:
        res+=1+ber(p)
    return res==k
```

1.(b) On saisit :

```
def PE(k):
    N=2000
    return np.mean([atteint(k) for i in range(N)])

print("Cas : Y_1-1 ~ B(p) :")
print('1/E(Y_1)=',1/(1+p))
for k in range(1,10):
    print('k=',k,'P(E_k)=',PE(k))
```

On observe :

```
Cas : Y_1-1 ~ B(p) :
1/E(Y_1)= 0.7874015748031495
k= 1 P(E_k)= 0.7166
k= 2 P(E_k)= 0.8096
k= 3 P(E_k)= 0.783
k= 4 P(E_k)= 0.7888
...
```

On conjecture $$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{E}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}}$$

1.(c) On saisit :

```
def atteint(k):
    res=0
    while res<k:
        res+=rd.geometric(p)
    return res==k

...

print("Cas : Y_1 ~ G(p) :")
print('1/E(Y_1)=',p)
for k in range(1,10):
    print('k=',k,'P(E_k)=',PE(k))
```

On observe :

```
Cas : Y_1 ~ G(p) :
1/E(Y_1)= 0.27
k= 1 P(E_k)= 0.265
k= 2 P(E_k)= 0.257
k= 3 P(E_k)= 0.287
...
```

On observe un comportement sensiblement identique à précédemment (on verra que c'est même plus tranché en fait).

2. Soit k entier. Pour $n < m$, on a

$$\{\mathrm{S}_n = k\} \cap \{\mathrm{S}_m = k\} \subset \left\{\sum_{i=n+1}^{m} \mathrm{Y}_i = 0\right\} = \varnothing$$

L'événement E_k est réalisé si et seulement s'il existe n entier tel que $\mathrm{S}_n = k$ et un tel n s'il existe est unique. On conclut

$$\boxed{\mathrm{E}_k = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} \{\mathrm{S}_n = k\}}$$

Remarque : Si k est entier non nul, on peut écrire $\mathrm{E}_k = \bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{S}_n = k\}$ puisque $\mathrm{S}_0 = 0$ ce qui implique $\{\mathrm{S}_0 = k\} = \varnothing$.

3. Soit k et j entiers non nuls. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{S}_n = k\} \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n = k, \mathrm{Y}_1 = j)$$

Si $j \geqslant k+1$, on a pour $n \geqslant 1$

$$\{\mathrm{S}_n = k, \mathrm{Y}_1 = j\} \cap \{\mathrm{Y}_1 \leqslant k, \mathrm{Y}_1 = j\} = \varnothing$$

d'où $$\forall j \geqslant k+1 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = 0$$

Si $j \leqslant k$, il vient $$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i = k-j, \mathrm{Y}_1 = j)$$

Les variables $\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i$ et Y_1 sont indépendantes d'où

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i = k-j)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)$$

La variable $\sum_{i=2}^{n} \mathrm{Y}_i$ a même loi que S_{n-1} et par suite

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_{n-1} = k-j) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} \{\mathrm{S}_{n-1} = k-j\}\right)$$

Ainsi $$\boxed{\forall (k,j) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \begin{cases} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)\mathbb{P}(\mathrm{E}_{k-j}) \text{ si } j \leqslant k \\ 0 \qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}}$$

Par probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{E}_k) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{j=1}^{+\infty} \mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\}) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\mathrm{E}_k \cap \{\mathrm{Y}_1 = j\})$$

Ainsi $$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(\mathrm{E}_k) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_1 = j)\mathbb{P}(\mathrm{E}_{k-j})}$$

4. On a $0 \leqslant u_k \leqslant 1$ pour tout k entier. Le rayon de convergence de la série entière $\sum u_k t^k$ est donc $\geqslant 1$ ce qui prouve que la fonction u est définie sur $[\,0\,;1\,[$. Pour $t \in [\,0\,;1\,[$, on a

$$u(t) = u_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j \right) t^k$$

Si on pose $f_0 = 0$ par commodité, on a

$$u(t) = 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} u_{k-j} f_j \right) t^k$$

La fonction f est la fonction génératrice de Y_1 donc le rayon de convergence de sa série entière est $\geqslant 1$. Ainsi, par produit de Cauchy de séries entières, on obtient

$$u(t) = 1 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} f_j t^j \right) = 1 + u(t)f(t)$$

Puis, la fonction f est croissante comme somme (infinie) de telles fonctions et $f(t) \leqslant f(1) = 1$ avec

$$\begin{aligned} f(t) = f(1) \iff \sum_{j=0}^{+\infty} \underbrace{f_j(1-t^j)}_{\geqslant 0} = 0 &\iff \forall j \in \mathbb{N} \qquad f_j(1-t^j) = 0 \\ &\iff \exists j \in \mathbb{N}^* \qquad 1 - t^j = 1 \iff t = 1 \end{aligned}$$

puisque les f_j sont non tous nuls. On conclut

$$\boxed{\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1-f(t)}}$$

5. Si $\mathrm{Y}_1 - 1 \sim \mathscr{B}(p)$, on a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad f(t) = (1-p)t + pt^2$$

d'où $\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \dfrac{1}{1-(1-p)t-pt^2} = \dfrac{1}{(1-t)(1+pt)} = \dfrac{1}{1+p}\left[\dfrac{1}{1-t} + \dfrac{p}{1+pt}\right]$

Ainsi $\quad \forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \dfrac{1}{1+p}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^k + p\sum_{k=0}^{+\infty}(-pt)^k\right] = \dfrac{1}{1+p}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(1+(-1)^k p^{k+1}\right) t^k$

Par unicité du développement en série entière, on conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{B}(p) \text{, alors } u_k = \frac{1}{1+p}\left(1+(-1)^k p^{k+1}\right) \text{ pour tout } k \text{ entier.}}$$

On peut compléter la simulation faite précédemment :

```
print("Cas : Y_1-1 ~ B(p) :")
print('1/E(Y_1)=',1/(1+p))
for k in range(1,10):
    print('k=',k,'P(E_k)=',PE(k),'P(E_k)_th=',(1+(-1)**k*p**(k+1))/(1+p))
```

et on observe :

```
Cas : Y_1-1 ~ B(p) :
1/E(Y_1)= 0.7874015748031495
k= 1 P(E_k)= 0.7326 P(E_k)_th= 0.73
k= 2 P(E_k)= 0.7998 P(E_k)_th= 0.8029
k= 3 P(E_k)= 0.779 P(E_k)_th= 0.7832169999999999
...
```

On suppose $\mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p)$. Pour $t \in [\,0\,;1\,[$, on a

$$f(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} t^j = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

puis

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1 - \dfrac{pt}{1-(1-p)t}} = \frac{1-(1-p)t}{1-t} = (1-(1-p)t)\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = 1 + p\sum_{k=1}^{+\infty} t^k$$

Par unicité du développement en série entière, on conclut

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{Y}_1 \sim \mathscr{G}(p), \text{ alors } u_k = p \text{ pour tout } k \text{ entier non nul.}}$$

6. On note $\operatorname{supp} \mathrm{Y}_1 = \{f_{k_1}, \ldots, f_{k_n}\}$ avec les k_j premiers entre eux dans leur ensemble. On a

$$\forall t \in [\,0\,;1\,[\qquad u(t) = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} t^{k_j}}$$

On sait que $\sum_{j=1}^{n} f_{k_j} = 1$ donc 1 est un pôle de la fraction rationnelle définissant u. Soit α un pôle complexe de cette fraction rationnelle avec $|\alpha| \leqslant 1$. On a $\sum_{j=1}^{n} f_{k_j} \alpha^{k_j} = 1$ d'où

$$1 = \left| \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} \alpha^{k_j} \right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} = 1$$

ce qui prouve que l'inégalité triangulaire est une égalité et par conséquent $\alpha^{k_j} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$ avec θ réel pour tout $j \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$. Par suite

$$1 = \sum_{j=1}^{n} f_{k_j} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}$$

d'où $\alpha^{k_j} = 1$ pour tout $j \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$. Or, par relation de Bezout, on dispose de u_j entiers relatifs tels que $\sum_{j=1}^{n} u_j k_j = 1$. Il vient

$$\alpha = \alpha^{\sum_{j=1}^{n} u_j k_j} = 1$$

Ainsi, l'unique pôle de module $\leqslant 1$ est égal à 1 et tous les autres sont donc de module > 1. Soit α un pôle de module > 1. Sa contribution dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{1-f}$ est de la forme

$$\frac{\lambda_1}{\alpha - t} + \frac{\lambda_2}{(\alpha - t)^2} + \ldots$$

et

$$\frac{\lambda_1}{\alpha - t} = \frac{\lambda_1}{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^k$$

le terme de degré k est donc proportionnel à $\dfrac{1}{\alpha^k}$ qui est de limite nulle et de même pour les autres termes. Enfin, on trouve

$$\frac{1}{1-f(t)} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} k_j f_{k_j}} \frac{1}{1-t} + \ldots = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} k_j f_{k_j}} \sum_{k=0}^{+\infty} t^k + \ldots$$

et d'après ce qui précède, on conclut

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathrm{Y}_1)}}$$

Exercice 16 (Mines-Telecom 2018)

Déterminer
$$\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

Corrigé : On pose
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \left]0\,;+\infty\right[\qquad u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

Pour $x > 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées puisque $\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ décroît et tend vers zéro. On en déduit la convergence simple sur $\left]0\,;+\infty\right[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$. Par contrôle du reste, on a pour n entier avec l'inégalité de concavité $\ln(1+u) \leqslant u$ pour $u \geqslant 0$
$$\forall x > 0 \qquad |\mathrm{R}_n(x)| \leqslant \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Il en résulte que $\|\mathrm{R}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\left]0\,;+\infty\right[$. Enfin, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{(-1)^{n-1}}{x}\frac{x}{n} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

D'après le théorème de double-limite, on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

On reconnaît une somme dont on connaît la valeur (résultat classique) et on conclut
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(2)}$$

Exercice 17 (Mines-Telecom 2021)

Soit $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{Sp}\,(\mathrm{S}) \subset \,]\,0\,;+\infty\,[$. Pour $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Y}_k = \frac{\mathrm{S}^k\mathrm{X}}{\|\mathrm{S}^k\mathrm{X}\|}$$

Justifier que la suite $(\mathrm{Y}_k)_k$ est bien définie puis montrer qu'elle converge vers un vecteur propre de S.

Corrigé : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ canoniquement associé à S. La base canonique $\mathscr{C}$ est orthonormée pour le produit scalaire canonique et on en déduit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème spectral, on a

$$\mathrm{E} = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)}} \mathrm{E}_\lambda(u)$$

Par une récurrence immédiate, pour $x = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} x_\lambda$ avec $x_\lambda \in \mathrm{E}_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u^k(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} \lambda^k x_\lambda$$

Pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, on pose

$$\Lambda_x = \{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \mid x_\lambda \neq 0_\mathrm{E}\} \quad \text{ et } \quad \alpha_x = \max \Lambda_x$$

Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Par définition de Λ_x, on a

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u)} x_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda_x} x_\lambda = x_{\alpha_x} + \sum_{\lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\}} x_\lambda$$

Ainsi
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad u^k(x) = \alpha_x^k x_{\alpha_x} + \sum_{\lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\}} \lambda^k x_\lambda$$

Soit $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$. Comme $u \in \mathscr{S}^{++}(\mathrm{E})$, la valeur propre α_x est strictement positive et on a

$$\forall \lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\} \qquad 0 < \lambda < \alpha_x$$

d'où
$$\forall \lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\} \qquad \left(\frac{\lambda}{\alpha_x}\right)^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Par conséquent
$$\frac{1}{\alpha_x^k} u^k(x) = x_{\alpha_x} + \sum_{\lambda \in \Lambda_x \setminus \{\alpha_x\}} \left(\frac{\lambda}{\alpha_x}\right)^k x_\lambda \xrightarrow[k \to +\infty]{} x_{\alpha_x}$$

L'endomorphisme u est un automorphisme d'où u^k également pour tout k entier. Ainsi, pour $x \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$, on a $u^k(x) \neq 0_\mathrm{E}$ et par conséquent

La suite $(x_k)_k$ est bien définie.

On pose
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad v_k = \frac{1}{\alpha_x^k} u^k(x)$$

On obtient
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad x_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$$

D'après le résultat de la question 4 et la continuité de la norme, on conclut

$$\boxed{x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{x_{\alpha_x}}{\|x_{\alpha_x}\|} \in \mathrm{E}_{\alpha_x}(u)}$$

Remarque : Il s'agit d'une déclinaison pour un endomorphisme symétrique défini positif de *la méthode de la puissance itérée.*

Exercice 18 (Centrale 2021)

Pour $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $a \mod b$ et $a \operatorname{div} b$ le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b. Soit A un entier $\geqslant 3$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\mathrm{A}^{n^2+n} \mod (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1)\right) \mod \mathrm{A}^n$$

On définit la *suite de Fibonacci* notée $(\mathrm{F}_n)_n$ par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pour tout n entier.

1. Avec l'outil informatique, afficher les 20 premières valeurs des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\mathrm{F}_n)_{n\geqslant 1}$. Que peut-on conjecturer ?
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie en vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1 \in \mathbb{N}^*$$
3. Calculer u_1.
4. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \mathrm{F}_n x^n$. On note S sa somme.
5. Calculer $\mathrm{S}(x)$ pour $x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$.
6. Montrer $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\mathrm{A}^{n^2+n} \operatorname{div} (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1)\right) \mod \mathrm{A}^n$
7. Établir $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{F}_{n+2} \leqslant \mathrm{A}^n$
8. Prouver la conjecture faite à la première question.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def F(n):
    if n<=1:
        return n
    else:
        a,b=0,1
        for k in range(2,n+1):
            a,b=b,a+b
        return b

A=3
def u(n):
    return ((A**(n**2+n))%(A**(2*n)-A**n-1))%(A**n)

print([F(k) for k in range(1,21)])
print([u(k) for k in range(1,21)])
```

On observe :

```
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...]
[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...]
```

On conjecture $\qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \mathrm{F}_n}$

2. Pour $\mathrm{A} \geqslant 3$, on a $\mathrm{A}^n \geqslant 3$ pour n entier non nul puis

$$\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1 = \mathrm{A}^n(\mathrm{A}^n - 1) - 1 \geqslant 3 \times 2 - 1 \leqslant 1$$

et il s'agit clairement d'un entier. On conclut

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bien définie.}}$$

3. On a
$$\mathrm{A}^2 = 1 \times (\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 1) + \mathrm{A} + 1$$

Avec l'équivalence
$$\mathrm{A} + 1 < \mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 1 \iff 3 < (\mathrm{A} - 1)^2$$

on constate qu'on a bien écrit la division euclidienne de A^2 par $\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 1$ et on conclut

$$\boxed{u_1 = (\mathrm{A} + 1) \mod \mathrm{A} = 1}$$

4. La suite $(\mathrm{F}_n)_n$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ dont les racines sont φ et $-\dfrac{1}{\varphi}$ avec $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Avec les conditions initiales, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \frac{(-1)^n}{\varphi^n}\right)$$

En observant $\varphi > 1$, il vient $\mathrm{F}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$ et d'après la règle de d'Alembert, on conclut

$$\boxed{\mathrm{R} = \frac{1}{\varphi}}$$

5. Soit $x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[$. Il vient avec la linéarité du symbole somme, la convergence étant réalisée

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_n x^n = x + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_{n+2} x^{n+2} x + \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+1}) x^{n+2} = x + x^2\mathrm{S}(x) + x\mathrm{S}(x)$$

Ainsi
$$\boxed{\forall x \in \left]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\right[\qquad \mathrm{S}(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}}$$

6. Soit n entier non nul. On note

$$q_n = \mathrm{A}^{n^2+n} \operatorname{div} (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1) \quad \text{et} \quad r_n = \mathrm{A}^{n^2+n} \mod (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1)$$

On a
$$\mathrm{A}^{n^2+n} = q_n(\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1) + r_n$$

et
$$\mathrm{A}^{n^2+n} \equiv 0\ [\mathrm{A}^n] \quad \text{et} \quad \mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1 \equiv -1\ [\mathrm{A}^n]$$

d'où
$$-q_n + r_n \equiv 0\ [\mathrm{A}^n]$$

On conclut
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \left(\mathrm{A}^{n^2+n} \operatorname{div} (\mathrm{A}^{2n} - \mathrm{A}^n - 1)\right) \mod \mathrm{A}^n}$$

7. On montre par récurrence $\mathrm{F}_{n+2} \leqslant \mathrm{A}^n$ pour tout n entier. L'inégalité est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ puisque $\mathrm{F}_2 = 1$ et $\mathrm{F}_3 = 2$. On la suppose vraie jusqu'au rang $n + 1$ avec n entier. Il vient

$$\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n \leqslant \mathrm{A}^{n-1} + \mathrm{A}^{n-2} = \mathrm{A}^{n-1}\underbrace{(\mathrm{A} + 1)}_{\leqslant \mathrm{A}^2} \leqslant \mathrm{A}^n$$

ce qui clôt la récurrence. On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{F}_{n+2} \leqslant \mathrm{A}^n}$$

8. On vérifie directement le cas $n = 1$. On suppose ensuite $n \geqslant 2$. On a

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \frac{\mathrm{A}^{-n}}{1-\mathrm{A}^{-n}-\mathrm{A}^{-2n}} = \frac{\mathrm{A}^{n}}{\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1}$$

d'où
$$(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \mathrm{A}^{n}$$

puis
$$(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\mathrm{A}^{n^2}\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \mathrm{A}^{n^2+n}$$

avec
$$\mathrm{A}^{n^2}\mathrm{S}(\mathrm{A}^{-n}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn}$$

On a
$$\alpha_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{A}^{k-2}\mathrm{A}^{n^2-kn}$$

et après le changement d'indice $\ell = k-(n+1)$, on trouve

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{A}^{k-2+n^2-kn} = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathrm{A}^{\ell(1-n)-1} = \frac{\mathrm{A}^{n}}{\mathrm{A}^{n+1}-\mathrm{A}^{2}}$$

On vérifie par récurrence $\mathrm{A}^n < \mathrm{A}^{n+1}-\mathrm{A}^2$ pour $n \geqslant 2$. On a donc établi

$$(\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn}+\alpha_n\right) = \mathrm{A}^{n^2+n}$$

avec
$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn} \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \alpha_n \in [\,0\,;1\,[$$

Ainsi
$$\left\lfloor \frac{\mathrm{A}^{n^2+n}}{\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{F}_k\mathrm{A}^{n^2-kn}$$

Puis
$$\left(\mathrm{A}^{n^2+n}\ \mathrm{div}\ (\mathrm{A}^{2n}-\mathrm{A}^{n}-1)\right) \mod \mathrm{A}^n = \mathrm{F}_n$$

On conclut
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \mathrm{F}_n}$$

Exercice 19 (Centrale 2016)

Pour n entier non nul, on pose

$$\forall x > 0 \qquad f_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Écrire une fonction `x(n)` d'argument n entier et qui renvoie x_n.
3. Représenter les termes de la suite $(x_n)_{n\in[\![1\,;20]\!]}$. Que peut-on conjecturer quant au comportement asymptotique de la suite $(x_n)_n$?
4. Prouver que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
5. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n pour $n \to +\infty$.
6. Poursuivre ce développement.

Corrigé : 1. On a $f_n(1) = 1 - n \neq 0$ pour $n \geqslant 2$. On suppose $n > 2$ pour la suite. Pour $x > 0$ avec $x \neq 1$, on trouve

$$f_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^n - \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1}$$

On pose $$\forall x > 0 \qquad g_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

La fonction g_n est dérivable avec $g_n'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1} = x^{n-1}\left((n+1)x - 2n\right)$. On en déduit que g_n est décroissante sur $]\,0\,;1\,[$, sur $\left]1\,;\dfrac{2n}{n+1}\right]$ puis croissante sur $\left[\dfrac{2n}{n+1}\,;+\infty\right[$. Comme $g_n(1) = 1$, la fonction g_n ne s'annule pas sur $]\,0\,;1\,[$ et $\left]1\,;\dfrac{2n}{n+1}\right]$ mais comme $g_n\left(\dfrac{2n}{n+1}\right) < g_n(1) = 0$, on a un unique point d'annulation de g_n sur $\left[\dfrac{2n}{n+1}\,;+\infty\right[$ qui est donc également l'unique point d'annulation de f_n. Ainsi

$$\boxed{\text{Il existe un unique } x_n > 0 \text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$$

Variante : On peut aussi considérer

$$\forall x > 0 \qquad h_n(x) = \frac{f_n(x)}{x^n} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x^{n-k}}$$

qui est strictement croissante comme somme de telles fonctions. On a $h_n(1) = 1 - n < 0$ pour $n \geqslant 2$ et $h_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ d'où l'existence et unicité de $x_n > 1$ telle que $h_n(x_n) = 0$.

2. On saisit :

```
def x(n):
    return resol.fsolve(lambda x:x**n-sum([x**k for k in range(n)]),2)[0]
```

On initialise la descente à 2 pour être au-delà de l'extremum atteint en $\dfrac{2n}{n+1}$.

3. On saisit :

```
tn=range(2,15)
tx=[x(n) for n in tn]
plt.plot(tn,tx,'bo--')
plt.grid();plt.show()
```

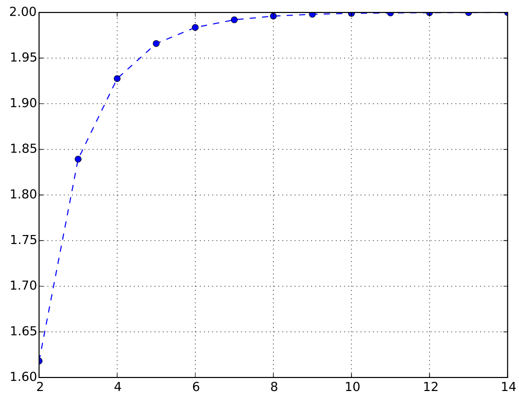

FIGURE 6 – Tracé de la suite $(x_n)_n$

On conjecture $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2}$

4. Soit $n \geqslant 2$. On a $g_n(2) = 2^{n+1} - 2 \times 2^n + 1 = 1 > 0 = g_n(x_n)$

Ainsi, par croissance de stricte de g_n, il vient

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \frac{2n}{n+1} \leqslant x_n \leqslant 2$$

Par encadrement $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2}$

5. On a

$$f_n(x_n) = 0 \iff x_n - \frac{x_n^n - 1}{x_n - 1} = 0 \iff x_n^{n+1} - 2x_n + 1 = 0 \iff x_n^n(2 - x_n) = 1$$

Avec $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, on obtient $x_n \geqslant \dfrac{3}{2}$ pour n assez grand. Puis

$$\frac{n}{x_n^n} < n\left(\frac{2}{3}\right)^n = \mathrm{o}(1) \implies x_n^{-n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ensuite

$$\begin{aligned} 2 - x_n &= x_n^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-n\left(\ln(2) + \ln\left(1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right) \\ 2 - x_n &= \exp\left(-n\left(\ln(2) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-n\ln(2) + \mathrm{o}(1)\right) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{x_n = 2 - \dfrac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right)}$

6. On réinjecte le développement obtenu dans la relation vérifiée par x_n :

$$
\begin{aligned}
2 - x_n &= x_n^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(2 - \frac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(-n\left(\ln(2) + \ln\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)\right)\right)\\
2 - x_n &= \exp\left(-n\left(\ln(2) - \frac{1}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)\right) = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{n}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n}{2^n}\right)\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\boxed{x_n = 2 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{n}{2^n}\right)}$$

Remarque : On peut évidemment itérer ce procédé.

Exercice 20 (Centrale 2015)

On définit la suite de fonctions $(\mathrm{S_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S_N}(x) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

1. Écrire une fonction `S(N,x)` d'argument N entier et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ qui renvoie $\mathrm{S_N}(x)$.
2. Tracer le graphe de $\mathrm{S_N}$.
3. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{S_N})_{\mathrm{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera S.
4. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
5. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.
6. Montrer $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{S}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\mathrm{S}(x)$
7. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \pi \operatorname{cotan}(\pi x) - \mathrm{S}(x)$ vérifie la même relation.
8. Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. En déduire S.

Corrigé : 1. On saisit :

```
def S(N,x):
    res=0
    for n in range(-N,N+1):
        res+=1/(x+n)
    return res
```

2. On saisit :

```
N=100
tx=np.linspace(-2.5,2.5,1000)
tS=[S(N,x) for x in tx]
plt.plot(tx,tS)
plt.grid();plt.axis([-2.5,2.5,-5,5])
plt.show()
```

On observe :

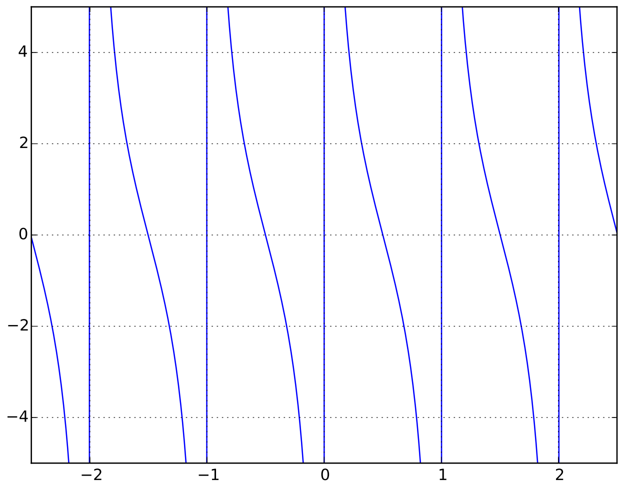

Figure 7 – Graphe de S_{100}

3. Montrons l'égalité suggérée en préambule. Soit N entier et $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$. On a

$$S_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{x+n} + \sum_{n=-N}^{-1} \frac{1}{x+n}$$

avec un changement d'indice dans la dernière somme, on trouve

$$S_N(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

On a
$$\frac{2x}{x^2-n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{2x}{x^2-n^2}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (S_N)_N \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}.}$$

4. Soit $[\,a\,;b\,] \subset \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$. On a

$$\forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad |x| \leqslant |a| + |b|$$

Ainsi
$$\forall n \geqslant |a|+|b| \qquad \forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad \left|\frac{2x}{x^2-n^2}\right| \leqslant \frac{2(|a|+|b|)}{n^2-(|a|+|b|)^2}$$

On en déduit la convergence normale sur tout segment et par conséquent

$$\boxed{\text{La série définissant S converge uniformément sur tout segment de } \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}.}$$

5. On a
$$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \qquad S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2}$$

La fonction S est somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment de $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ d'où la continuité de S sur $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$. L'expression de $S(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ montre que S est clairement impaire. Enfin, pour $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$, on a

$$S_N(x+1) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+1+n} = S_N(x) + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} S(x)$$

et $$\mathrm{S_N}(x+1) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \mathrm{S}(x+1)$$

Ainsi $\boxed{\text{La fonction S est continue sur } \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}\text{, impaire et 1-périodique.}}$

6. Soit $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$ et N entier. On a

$$\mathrm{S_N}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \frac{2}{x+2n} \quad \text{et} \quad \mathrm{S_N}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \frac{2}{x+2n+1}$$

On remarque, en distinguant les termes d'indices pairs et impairs, qu'on a

$$\mathrm{S_N}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{S_N}\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=-2\mathrm{N}}^{2\mathrm{N}} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x+2\mathrm{N}+1} = \mathrm{S_{2N}}(x) + \frac{1}{x+2\mathrm{N}+1}$$

Faisant tendre $\mathrm{N} \to +\infty$, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathrm{S}\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\mathrm{S}(x)}$$

7. Soit $x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}$. On a

$$\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \mathrm{cotan}\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right) = 2\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = 2\,\mathrm{cotan}\,(\pi x)$$

Par suite $\boxed{\text{La fonction } f \text{ vérifie la relation fonctionnelle de la fonction S.}}$

8. On a $$\mathrm{S}(x) - \frac{1}{x} = 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$$

On montre sans difficulté que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2-n^2}$ est continue sur un voisinage de zéro et par conséquent

$$\mathrm{S}(x) = \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1)$$

Puis, avec les développements usuels, il vient

$$\pi\,\mathrm{cotan}\,(\pi x) = \pi \frac{1+\mathrm{o}(1)}{\pi x + \mathrm{o}(x)} = \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1)$$

D'où $$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} = 0$$

Par 1-périodicité, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to k]{} 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la fonction f peut se prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$. Soit $\widetilde{f}$ son prolongement sur $[\,0\,;1\,]$, $\alpha \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\widetilde{f}(\alpha) = \operatorname*{Max}_{[0;1]} \widetilde{f}$ et $\beta \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\widetilde{f}(\beta) = \operatorname*{Min}_{[0;1]} \widetilde{f}$. On trouve

$$2\widetilde{f}(\alpha) = \widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \widetilde{f}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \widetilde{f}(\alpha)\ , \quad \widetilde{f}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) \leqslant \widetilde{f}(\alpha)$$

On en déduit notamment $$\widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \widetilde{f}(\alpha)$$

Une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \widetilde{f}(\alpha) = \widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

et par continuité de $\widetilde{f}$ $$\widetilde{f}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \widetilde{f}(0) = 0$$

On en déduit $\widetilde{f}(\alpha) = 0$. En appliquant le même raisonnement à $-f$, on obtient $\widetilde{f}(\beta) = 0$ d'où la nullité de $\widetilde{f}$ sur $[\,0\,;1\,]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité. On conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z} \qquad \mathrm{S}(x) = \pi \operatorname{cotan}(\pi x)}$$

Exercice 21 (Centrale 2024)

Pour n entier non nul, on note $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité et on pose $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ et $\Lambda(n) = \sum\limits_{d|n} \lambda(d)$.

1. Soient m, n deux entiers non nuls premiers entre eux. Établir
$$\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n) \quad \text{et} \quad \Lambda(mn) = \Lambda(m)\Lambda(n)$$
2. Déterminer une expression simple de $\Lambda(n)$ pour n entier non nul.
3. Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, montrer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n^2}$$

Corrigé : 1. On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des diviseurs de n entier non nul. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Omega(n) = \sum_{p\in\mathcal{P}} v_p(n)$$
Soient m, n entiers non nuls. On a
$$\forall p \in \mathcal{P} \qquad v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$$
d'où
$$\sum_{p\in\mathcal{P}} v_p(mn) = \sum_{p\in\mathcal{P}} v_p(m) + \sum_{p\in\mathcal{P}} v_p(n)$$
et par conséquent
$$\lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n)$$
On pose
$$\pi : \begin{cases} \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m \longrightarrow \mathcal{D}_{mn} \\ (d_1, d_2) \longmapsto d_1 d_2 \end{cases}$$
L'application est bien définie : si $d_1|n$ et $d_2|m$, alors $d_1d_2|mn$. Soient (d_1, d_2), (d_1', d_2') dans $\mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ tels que $d_1d_2 = d_1'd_2'$. On a $d_1|d_1'd_2'$ et $d_1 \wedge d_2' = 1$ puisque $d_1 \wedge m = 1$ et $d_2'|m$. D'après le lemme de Gauss, il s'ensuit $d_1|d_1'$ et de même $d_2|d_2'$. Par symétrie des rôles, on obtient que d_1, d_1' sont des entiers associés donc égaux et de même avec d_2, d_2' d'où l'injectivité de π. Soit $d \in \mathcal{D}_{mn}$. On pose $d_1 = d \wedge n$ et $d_2 = d \wedge m$. On a $d_1|n$ et $d_2|m$ et comme $n \wedge m = 1$, alors $d_1 \wedge d_2 = 1$. De plus, on a $d_1|d$ et $d_2|d$ d'où $d_1d_2|d$. Puis, d'après la relation de Bézout, on dispose de a, b, u, v dans $\mathbb{Z}$ tels que
$$d_1 = ad + bn \qquad d_2 = ud + vm$$
d'où
$$d_1d_2 = d(aud + avm + bu) + mnbv$$
Or, on a $d|mn$ d'où $d|d_1d_2$ et par conséquent, les entiers d et d_1d_2 sont associés donc égaux. Ainsi, l'application π est surjective et on conclut à sa bijectivité. Par conséquent
$$\Lambda(mn) = \sum_{d\in\mathcal{D}_{mn}} \lambda(d) = \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{D}_m\times\mathcal{D}_n} \lambda(d_1d_2) = \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{D}_m\times\mathcal{D}_n} \lambda(d_1)\lambda(d_2) = \sum_{d_1\in\mathcal{D}_m} \lambda(d_1) \sum_{d_2\in\mathcal{D}_n} \lambda(d_2)$$
On conclut
$$\boxed{\forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad \text{avec} \quad m \wedge n = 1 \qquad \lambda(mn) = \lambda(m)\lambda(n) \quad \text{et} \quad \Lambda(mn) = \Lambda(m)\Lambda(n)}$$
Remarque : La fonction Λ est dite *multiplicative*. La fonction λ est *complètement multiplicative* puisque la propriété établie a lieu sans la contrainte m et n premiers entre eux.

2. Soit $q \in \mathcal{P}$ et α entier non nul. On a

$$\mathcal{D}_{q^\alpha} = \{1, q, \ldots, q^\alpha\} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![\, 0\,;\,\alpha\,]\!] \qquad \Omega(q^k) = k$$

puis $$\Lambda(q^\alpha) = \sum_{d \in \mathcal{D}_{q^\alpha}} (-1)^{\Omega(d)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^\alpha = \frac{1-(-1)^{\alpha+1}}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \text{ impair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit n entier non nul. Il vient

$$\Lambda(n) = \Lambda\left(\prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \Lambda\left(p^{v_p(n)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists p \in \mathcal{P} \mid v_p(n) \text{ impair} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On conclut $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \Lambda(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3. On a $$\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad \left|\lambda(n) z^{nk}\right| \leqslant |z|^{nk}$$

et $$\sum_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2} |z|^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |z|^{nk}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|z|^n}{1-|z|^n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{1-|z|} \leqslant \frac{1}{(1-|z|)^2}$$

ce qui prouve la sommabilité de la famille $\left(\lambda(n) z^{nk}\right)_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2}$. D'après le théorème de Fubini, il vient

$$\sum_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2} \lambda(n) z^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(n) z^{nk}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n) z^n}{1-z^n}$$

La famille $(\mathrm{I}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ avec

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \qquad \mathrm{I}_m = \{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid nk = m\}$$

est un recouvrement disjoint de $(\mathbb{N}^*)^2$. Ainsi, d'après le théorème de sommation par paquets, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2} \lambda(n) z^{nk} &= \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{(n,k) \in \mathrm{I}_m} \lambda(n) z^{nk}\right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{(n,k) \in \mathrm{I}_m} \lambda(n)\right) z^m = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \left(\sum_{n \mid m} \lambda(n)\right) z^m = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^*} z^{\ell^2} \end{aligned}$$

On conclut $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n) z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n^2}}$$