Préparation à l'oral - Feuille n°8

Exercice 1 (CCINP 2025)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de f différentiable en $(0,0)$.

2. On pose $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : Exercice 57 CCPINP 2025

Exercice 2 (CCINP 2025)

Soit E l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit

$$\forall (f,g) \in \mathrm{E}^2 \qquad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos(2x))$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $x \mapsto \sin^2 x$.

Corrigé : Exercice 80 CCINP 2025

Exercice 3 (CCINP 2025)

Soit n entier non nul. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y le rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Corrigé : Exercice 109 CCINP 2025

Exercice 4 (IMT 2024)

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^2$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.
2. On suppose 0 valeur propre de A. Que peut-on dire de A ?
3. On suppose que 0 n'est pas valeur propre de A.

(a) Montrer que $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

(b) Décrire la matrice A.

Corrigé : 1. En transposant, il vient $A = \left(A^\top\right)^2 = (A^2)^2 = A^4$. Le polynôme $X^4 - X = X(X-1)(X-j)(X-\bar{j})$ annule A. Ainsi

$$\boxed{A^4 = A \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0, 1, j, \bar{j}\}}$$

2. Supposons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$. On a $\chi_A = X^2$ d'où $\chi_A(A) = A^2 = 0$ et par suite $A = A^4 = 0$. Supposons que le spectre de A n'est pas réduit à $\{0\}$. Si $\chi_A(j) = 0$, comme $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, on aurait $X(X-j)(X-\bar{j}) | \chi_A$ ce qui est absurde puisque $\deg \chi_A = 2$. Par conséquent, le seul autre cas possible est $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, 1\}$. On a

$$\det(A^2 + A + I_2) = \det(A - jI_2)\det(A - \bar{j}I_2) \neq 0$$

puis
$$A(A - I_2)(A^2 + A + I_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A(A - I_2) = 0$$

ce qui prouve $A^2 = A$ et donc $A = A^\top$ et la matrice A est donc matrice d'un projecteur orthogonal de rang 1. La synthèse est immédiate. On conclut

$$\boxed{\text{Si } \det(A) = 0, \text{ on a } A^\top = A^2 \text{ si et seulement si } A = 0 \text{ ou A matrice d'un projecteur orthogonal.}}$$

3.(a) On a
$$A(A^3 - I_2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad A^3 = I_2$$

Puis
$$\boxed{AA^\top = A^3 = I_2}$$

3.(b) On $\det(A^\top) = \det(A) = \det(A^2) = \det(A)^2$ d'où $\det(A) = 1$ et donc $A \in \mathcal{SO}_2(\mathrm{R})$. Par conséquent, il existe θ réel tel que $A = R(\theta)$. On trouve

$$\chi_A = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

Si $1 \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ d'où $A = I_2$. Sinon, on a $(X-j)(X-\bar{j}) | \chi_A$ d'où $\chi_A = (X-j)(X-\bar{j})$ et par conséquent $\theta \equiv \pm \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. La synthèse est immédiate. On conclut

$$\boxed{\text{Si } \det(A) \neq 0, \text{ on a } A^\top = A^2 \text{ si et seulement si } A = R(\theta) \text{ avec } \theta \in \left\{0, \pm\frac{2\pi}{3}\right\}.}$$

Exercice 5 (Mines 2025)

Pour $x \geqslant 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 1$ puis montrer que l'expression vaut aussi pour $x = 1$.
3. En déduire une expression simple de $F(x)$.
4. Calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Corrigé : 1. On pose
$$\forall (x, t) \in X \times I \qquad f(x, t) = \frac{\mathrm{Arctan}\,(xt)}{t(1+t^2)}$$

avec $\mathrm{X} = \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{I} = \,]\,0\,;+\infty\,[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathscr{C}^1$ sous l'intégrale.

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Puis, on a

$$f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{xt}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} x \quad \text{et} \quad f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ sur I.
• Pour $t \in \mathrm{I}$, on a $x \mapsto f(x,t) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{X},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

• Pour $x \in \mathrm{X}$, on a $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
• Domination : On a

$$\forall (x,t) \in \mathrm{X}\times\mathrm{I} \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction φ est dans $\mathscr{C}_{pm}(\mathrm{I},\mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = [\operatorname{Arctan} t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.
Ainsi

$$\boxed{\mathrm{F} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})}$$

2. Soit $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$. Par décomposition en éléments simples, on trouve

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right]$$

On suppose également $x \neq 0$ pour l'intégration du second membre. Il vient

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x^2}\,\frac{\pi}{2}(1-x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

La formule vaut aussi pour $x = 0$. Par ailleurs, comme F' est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $\mathrm{F}'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \mathrm{F}'(x)$ et par conséquent

$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}}$$

Remarque : Pour faire efficacement la décomposition en éléments simples, on peut considérer

$$\frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} = \frac{x^2u + 1 - x^2(u+1)}{(1+u)(1+x^2u)}\,\frac{1}{1-x^2}$$

et l'appliquer en $u = t^2$.

3. Par intégration, il vient

$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \int_0^x \mathrm{F}'(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\ln(1+x)}$$

4. Les fonctions $t \mapsto \operatorname{Arctan}(t)^2$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$. On a

$$-\frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{t} \underset{t\to 0}{\sim} -t \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{2\,\mathrm{Arctan}\,t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -2\mathrm{F}(1)$$

sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{Arctan}\,(t)^2}{t}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,t}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$$

On conclut
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\,(t)^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \pi\ln(2)}$$

Exercice 6 (Mines 2025)

On définit l'application $\mathrm{C} : \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{C}(\mathrm{A}) = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})$$

1. Montrer que l'application C est bien définie.
2. Étudier l'inversibilité de $\mathrm{I}_n + \mathrm{C}(\mathrm{A})$ avec $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'injectivité de C. L'application est-elle surjective ? Dans le cas contraire, préciser son image.

Corrigé : 1. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{X} = 0$. On a

$$\langle (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{X}, \mathrm{X}\rangle = \|\mathrm{X}\|^2 - \langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle = \|\mathrm{X}\|^2$$

On en déduit $\mathrm{I}_n - \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et de même pour $\mathrm{I}_n + \mathrm{A}$. Les matrices $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ et $\mathrm{I}_n + \mathrm{A}$ commutent d'où $(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^{-1}$ et $\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ aussi. Par suite, on trouve

$\mathrm{C}(\mathrm{A})^\top \mathrm{C}(\mathrm{A}) = (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A}) = (\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A}) = (\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^{-1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$

puis
$$\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{A}) = \det((\mathrm{I}_n + \mathrm{A})^\top) = \det(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$$

d'où
$$\det(\mathrm{C}(\mathrm{A})) = \det(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\det(\mathrm{I}_n + \mathrm{A}) = \det(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})^{-1}\det(\mathrm{I}_n - \mathrm{A}) = 1$$

Ainsi
$$\boxed{\text{L'application C est bien définie.}}$$

2. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. En additionnant les égalités

$$(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n + \mathrm{A} \quad \text{et} \quad (\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n - \mathrm{A}$$

il vient
$$(\mathrm{I}_n - \mathrm{A})(\mathrm{I}_n + \mathrm{C}(\mathrm{A})) = 2\mathrm{I}_n$$

Ainsi
$$\boxed{\forall \mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{I}_n + \mathrm{C}(\mathrm{A}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

Soient A, B matrices antisymétriques réelles telles que $\mathrm{C}(\mathrm{A}) = \mathrm{C}(\mathrm{B})$. Il vient

$$\mathrm{I}_n - \mathrm{A} = 2(\mathrm{I}_n + \mathrm{C}(\mathrm{A}))^{-1} = 2(\mathrm{I}_n + \mathrm{C}(\mathrm{B}))^{-1} = \mathrm{I}_n - \mathrm{B}$$

d'où $\mathrm{A} = \mathrm{B}$ et par conséquent

$$\boxed{\text{L'application C est injective.}}$$

On a établi $\mathrm{I}_n + \mathrm{C}(\mathrm{A}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ ce qui prouve que l'application C est à valeurs dans l'ensemble des matrices orthogonales n'admettant pas -1 comme valeur propre. La matrice $\mathrm{diag}(-\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_{n-2})$ est dans $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ et admet -1 comme valeur propre. Elle n'admet donc pas d'antécédent par l'application C d'où

$$\boxed{\text{L'application C n'est pas surjective.}}$$

D'après ce qui précède, on a

$$\operatorname{Im} C \subset \{B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \operatorname{Sp}(B)\}$$

Montrons que l'inclusion est une égalité. Soit $B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ avec $-1 \notin \operatorname{Sp}(B)$. On résout l'équation $C(A) = B$ d'inconnue $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} C(A) = B &\iff (I_n - A)^{-1}(I_n + A) = B \\ &\iff I_n + A = (I_n - A)B \iff A(I_n + B) = B - I_n \iff A = (B - I_n)(I_n + B)^{-1} \end{aligned}$$

Vérifions que la matrice A solution est bien dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Il vient en utilisant $B^\top = B^{-1}$

$$\begin{aligned} \left((B - I_n)(I_n + B)^{-1}\right)^\top &= (I_n + B^{-1})^{-1}(B^{-1} - I_n) \\ &= \left(B^{-1}(B + I_n)\right)^{-1} B^{-1}(I_n - B) = (B + I_n)^{-1}(I_n - B) \end{aligned}$$

Les matrices $I_n + B$ et $I_n - B$ commutent d'où $(I_n + B)^{-1}$ et $I_n - B$ également et on trouve $A^\top = -A$. On conclut

$$\boxed{\operatorname{Im} C = \{B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \operatorname{Sp}(B)\}}$$

Exercice 7 (Mines 2025)

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ bornée, montrer

$$\mathbb{E}(f(X)^n)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{Sup}\{f(x),\ x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) > 0\}$$

Corrigé : La variable $f(X)$ est bornée donc d'espérance finie. Par transfert, notant $X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, on a pour n entier non nul

$$\mathbb{E}(f(X)^n)^{1/n} = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} f(x_k)^n \mathbb{P}(X = x_k)\right)^{1/n}$$

On pose $$C = \operatorname{Sup}\{f(x),\ x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) > 0\}$$

On a $$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f(x_k)^n \mathbb{P}(X = x_k) \leqslant C^n \mathbb{P}(X = x_k)$$

d'où $$\sum_{k\in\mathbb{N}} f(x_k)^n \mathbb{P}(X = x_k) \leqslant C^n \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_k) = C^n$$

et par suite $$\mathbb{E}(f(X)^n)^{1/n} \leqslant C$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a $$f(X)^n \geqslant f(X)^n \mathbb{1}_{\{C-\varepsilon \leqslant f(X)\}} \geqslant (C - \varepsilon)^n \mathbb{1}_{\{C-\varepsilon\leqslant f(X)\}}$$

d'où $$\mathbb{E}(f(X)^n)^{1/n} \geqslant (C - \varepsilon)\mathbb{P}(C - \varepsilon \leqslant f(X))^{1/n}$$

Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$ et $f(x) \geqslant C - \varepsilon$. On en déduit $\mathbb{P}(C - \varepsilon \leqslant f(X)) > 0$ d'où

$$\mathbb{P}(C - \varepsilon \leqslant f(X))^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

et $$(C - \varepsilon)\mathbb{P}(C - \varepsilon \leqslant f(X))^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} C - \varepsilon$$

Ainsi, on dispose d'un rang N entier tel que pour $n \geqslant N$

$$C - 2\varepsilon \leqslant \mathbb{E}(f(X)^n)^{1/n} \leqslant C$$

On conclut $$\boxed{\mathbb{E}(f(X)^n)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \operatorname{Sup}\{f(x),\ x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X = x) > 0\}}$$

Exercice 8 (Centrale 2025)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que l'espace $\mathbb{K}[u]$ est de dimension finie avec $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$.
2. (a) Montrer que si l'endomorphisme u est inversible, alors $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
   (b) Montrer $\mathrm{e}^u \in \mathbb{K}[u]$.
3. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et D l'opérateur de dérivation. Montrer que $u = \mathrm{id} - \mathrm{D}$ est inversible. A-t-on $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$?

Corrigé : 1. On not $d = \deg \pi_u$. Soit p entier. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe Q, R dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{X}^p = \pi_u \mathrm{Q} + \mathrm{R}$ avec $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_u$. En évaluant en u, il vient

$$u^p = \pi_u(u) \circ \mathrm{Q}(u) + \mathrm{R}(u) = \mathrm{R}(u) \in \mathrm{Vect}\,(u^k)_{k \in [\![0\,;\,d-1]\!]}$$

Une combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille équivaut à écrire $\mathrm{R}(u) = 0$ avec $\deg \mathrm{R} < \deg \pi_u$. Si R n'est pas nul, on aurait un polynôme annulateur de u non divisible par π_u ce qui est absurde. On conclut

$$\boxed{\text{L'espace } \mathbb{K}[u] \text{ est de dimension finie avec } \dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u.}$$

2.(a) On a $\det(u) \neq 0$ puis

$$\begin{aligned}
\chi_u(u) = 0 &\iff u^n - \mathrm{Tr}\,(u) u^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det(u)\,\mathrm{id} = 0 \\
&\iff (-1)^{n-1} \det(u)^{-1} \left(u^n - \mathrm{Tr}\,(u) u^{n-1} + \ldots\right) = \mathrm{id} \\
\chi_u(u) = 0 &\iff u \circ (-1)^{n-1} \det(u)^{-1} \left(u^{n-1} - \mathrm{Tr}\,(u) u^{n-2} + \ldots\right) = \mathrm{id}
\end{aligned}$$

On conclut $\boxed{u^{-1} \in \mathbb{K}[u]}$

2.(b) L'ensemble $\mathbb{K}[u]$ est un sev de dimension finie et c'est par conséquent un fermé de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$. Or, la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{u^k}{k!}\right)_n$ est convergente à valeurs dans $\mathbb{K}[u]$ donc sa limite est dans $\mathbb{K}[u]$, autrement dit

$$\boxed{\mathrm{e}^u \in \mathbb{K}[u]}$$

3. On a $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ sans difficulté. Soit $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$. On a

$$u(\mathrm{P}) = \mathrm{Q} \iff \mathrm{Q} = \mathrm{P} - \mathrm{P}' \iff \forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{Q}^{(k)} = \mathrm{P}^{(k)} - \mathrm{P}^{(k+1)}$$

d'où
$$u(\mathrm{P}) = \mathrm{Q} \implies \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\mathrm{P}^{(k)} - \mathrm{P}^{(k+1)}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{Q}^{(k)}$$

et la synthèse est immédiate. On en déduit la bijectivité de u et on conclut

$$\boxed{u \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})}$$

On a
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u^{-1}(\mathrm{X}^n) = \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{X}^n)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \mathrm{X}^{n-k}$$

Soit $\mathrm{R} = \sum\limits_{k=0}^{q} \alpha_k \mathrm{X}^k$ tel que $\mathrm{R}(u) = u^{-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}(u)(\mathrm{X}^n) &= \sum_{k=0}^{q} \alpha_k (\mathrm{id} - \mathrm{D})^k (\mathrm{X}^n) \\
&= \sum_{k=0}^{q} \alpha_k \sum_{j=0}^{k} \tbinom{k}{j} (-1)^j \mathrm{D}^j (\mathrm{X}^n) \\
\mathrm{R}(u)(\mathrm{X}^n) &= \sum_{k=0}^{q} \alpha_k \sum_{j=0}^{k} \tbinom{k}{k} (-1)^j \frac{n!}{(n-j)!} \mathrm{X}^{n-j}
\end{aligned}$$

d'où X^{n-q} divise $\mathrm{R}(u)(\mathrm{X}^n)$. En choisissant $n = q+1$, on a X divise $\mathrm{R}(u)(\mathrm{X}^n)$ alors que le terme constant de $u^{-1}(\mathrm{X}^n)$ n'est pas nul ce qui est contradictoire. On conclut

$$\boxed{u^{-1} \notin \mathbb{K}[u]}$$

Exercice 9 (Centrale 2025)

1. Démontrer le théorème d'inversion série-intégrale sous convergence uniforme sur un segment.

2. On pose $\qquad \forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{I}(x) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2\sqrt{x}\sin(t)}\,\mathrm{d}t$

   Montrer que la fonction I est développable en série entière sur $\mathbb{R}_+$.

3. Déterminer un équivalent simple pour $x \to +\infty$ de $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

Corrigé : 1. Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continue qui converge uniformément sur $[\,a\,;b\,]$. On note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a par inégalité triangulaire

$$\left| \int_a^b (\mathrm{S}_n - \mathrm{S})(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b \|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}\|_\infty = (b-a)\|\mathrm{S}_n - \mathrm{S}\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

c'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{S}_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi $\qquad \boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t}$

2. Soit $x \geqslant 0$. L'intégrale $\mathrm{I}(x)$ est bien définie comme intégrale d'une fonction continue sur un segment. On a

$$\mathrm{I}(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\sqrt{x}\sin(t))^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

On pose $\qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{J} \qquad u_n(x) = \dfrac{(2\sqrt{x}\sin(t))^n}{n!}$

avec $\mathrm{J} = \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2} \right]$. On a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{J} \qquad |u_n(x)| \leqslant \frac{(2\sqrt{x})^n}{n!}$$

d'où $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|u_n\|_\infty \leqslant \dfrac{(2\sqrt{x})^n}{n!}$

On en déduit la convergence normale et donc uniforme sur le segment J de la série de fonctions continues $\sum u_n$. Ainsi, par intégration terme à terme, il vient pour $x \geqslant 0$

$$\mathrm{I}(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\sqrt{x})^n}{n!} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t$$

Pour n impair, on trouve $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\,\mathrm{d}t = 0$ par imparité de l'intégrande sur un segment centré en zéro. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{W}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2n}\,\mathrm{d}t$$

Par parité de l'intégrande pour n pair sur un segment centré en zéro, on a pour $x \geqslant 0$

$$\mathrm{I}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} x^n}{(2n)!} 2\mathrm{W}_n$$

Les fonctions sin et $\sin^{2n+1}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et en intégrant par parties, on obtient pour n entier

$$\mathrm{W}_{n+1}\left[-\cos(t)\sin(t)^{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin(t)^2)\sin(t)^{2n}\,\mathrm{d}t = (2n+1)\mathrm{W}_n - (2n+1)\mathrm{W}_{n+1}$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{W}_{n+1} = \frac{2n+1}{2(n+1)}\mathrm{W}_n$$

On a $\mathrm{W}_n > 0$ pour n entier par séparation de l'intégrale (intégrande continue positif non nul) et par suite, pour n entier

$$\mathrm{W}_n = \mathrm{W}_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{W}_k}{\mathrm{W}_{k-1}} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)2k}{(2k)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

Ainsi
$$\boxed{\forall x \geqslant 0 \qquad \mathrm{I}(x) = \pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}}$$

3. Avec le changement $u = 2\sqrt{x}\sin(t)$ pour $x > 0$, il vient

$$\mathrm{I}(x) = \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^u}{\sqrt{4x-u^2}}$$

On pose $\qquad \forall x > 0 \qquad \mathrm{A}(x) = \displaystyle\int_0^{2\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^u}{\sqrt{4x-u^2}}\,\mathrm{d}u \qquad \mathrm{B}(x) = \int_{-2\sqrt{x}}^{0} \frac{\mathrm{e}^u}{\sqrt{4x-u^2}}\,\mathrm{d}u$

Avec le changement $v = 2\sqrt{x} - u$, on obtient pour $x > 0$

$$\mathrm{A}(x) = \int_0^{2\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{x}-v}}{\sqrt{v(4\sqrt{x}-v)}}\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{2x^{1/4}}\int_0^{2\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^{-v}}{\sqrt{v\,(1-v/4\sqrt{x})}}\,\mathrm{d}v$$

On pose $\qquad \forall (x,v) \in \left]0\,;+\infty\right[^2 \qquad f(x,v) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-v}}{\sqrt{v\,(1-v/4\sqrt{x})}} & \text{si } v < 2\sqrt{x} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a pour x et v strictement positifs

$$f(x,v) \xrightarrow[x\to\infty]{} v^{-1/2}\mathrm{e}^{-v} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f(x,v) \leqslant \sqrt{2}v^{-1/2}\mathrm{e}^{-v}$$

Par convergence dominée, on en déduit

$$\mathrm{A}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{2x^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Puis, avec le changement $v = -u$, on trouve pour $x > 0$

$$0 \leqslant \mathrm{B}(x) = \int_0^{2\sqrt{x}} \frac{\mathrm{e}^{-v}}{\sqrt{4x - v^2}}\,\mathrm{d}v \leqslant \int_0^{2\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{4x - v^2}} \underbrace{=}_{s=2\sqrt{x}v} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}} = \mathrm{Arcsin}\,(1) = \frac{\pi}{2}$$

d'où
$$\mathrm{B}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{A}(x))$$

On conclut
$$\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}}{2x^{1/4}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$