

Devoir en temps libre n°1

Problème I

Soit $x \in]1; +\infty[$. On cherche à calculer l'intégrale de Poisson

$$J(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2) dt$$

1. Vérifier que $J(x)$ est bien définie.

2. Établir l'égalité
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) = \frac{x-1}{x+1} \prod_{k=n}^{2n-1} \left(x - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)$$

3. Montrer
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2\right) = \frac{x-1}{x+1} \prod_{k=0}^{2n-1} \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{2n}}\right)$$

4. En déduire
$$J(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{(x^{2n} - 1)(x - 1)}{x + 1} \right)$$

5. Conclure.

Problème II

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt$ converge.

2. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)^2}{t^2} dt, \quad A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)^2}{\sin(t)^2} dt, \quad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)^2}{\tan(t)^2} dt$$

(a) Justifier la convergence des intégrales définissant I_n , A_n et B_n et montrer

$$B_n \leq I_n \leq A_n$$

(b) Calculer $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ puis $A_n - B_n$.

(c) En déduire des expressions de A_n et B_n en fonction de n .

(d) Montrer que
$$\frac{I_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt$$

et préciser la valeur de cette intégrale.

Problème III

Pour α réel, on pose $\forall t \geq 1 \quad f_\alpha(t) = \frac{\sin(t)}{t^\alpha}$

Discuter en fonction de α de la convergence et de la convergence absolue de $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t) \, dt$.