

Préparation à l'interrogation n°01

1 Trigonométrie

Soit x réel et n entier. On a, en passant à la partie réelle pour la dernière égalité

$$\begin{aligned}\cos(x)^n &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} e^{-i(n-k)x} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((2k-n)x)\end{aligned}$$

2 Calcul intégral

$$\begin{aligned}1. \int \frac{dt}{1-t^2} &= \int \frac{1+t+1-t}{2(1-t)(1+t)} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right); \\ 2. \text{ Avec } \alpha \neq 1, \int \frac{dt}{t^\alpha} &= \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\end{aligned}$$

3 Formules

$$1. \text{ Taylor reste intégral} \qquad 2. x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

4 Étude asymptotique

$$\begin{aligned}1. \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \frac{x^2}{2!} + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2); \\ 2. \ln \left(\frac{\sin(t)}{t} \right) &= \ln \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + o(t^4) \right) = -\frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{1}{2} \frac{t^4}{(3!)^2} + o(t^4) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + o(t^4).\end{aligned}$$

5 Croissances comparées

Soient $\alpha, \beta > 0$. On a

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \qquad x^\beta e^{-\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \qquad x^\alpha \ln(x)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \qquad \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

6 Exercice type

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, alors $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge et vaut $\frac{1}{\alpha}$.

Corrigé : Pour $x \geq 0$, on a $\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha x}]$ et $|e^{-\alpha x}| = e^{-\operatorname{Re}(\alpha)x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Le résultat suit.

7 Exercice type - Lemme de Riemann-Lebesgue

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$. Étudier le comportement asymptotique de $\int_a^b f(t)e^{int} dt$ pour $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : Soit n entier non nul. En intégrant par partie, on a

$$\int_a^b f(t)e^{int} dt = \left[\frac{f(t)e^{int}}{in} \right]_a^b - \frac{1}{in} \int_a^b f'(t)e^{int} dt$$

D'où
$$\left| \int_a^b f(t)e^{int} dt \right| \leq \frac{1}{n} \left[|f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)| dt \right]$$

Ainsi

$$\boxed{\int_a^b f(t)e^{int} dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$$

8 Questions de cours

Intégrales généralisées, graphes usuels.