TS-2 : Échantillonnage et filtrage numérique

I Chaîne de traitement numérique du signal : exemple . . . 3
I.1 Schéma bloc . . . 3
I.2 Les étapes . . . 4
II Échantillonnage . . . 4
II.1 Signal échantillonné . . . 4
II.2 Spectre du signal de commande . . . 4
II.3 Spectre du signal échantillonné . . . 7
II.4 Condition de Nyquist-Shannon . . . 9
II.5 Choix des paramètres d'une acquisition numérique . . . 11
III Filtrage numérique (application en TP) . . . 13
III.1 Passe-bas du premier ordre . . . 13
III.2 Filtre d'ordre 2 . . . 13

MP 2026-2027
Aurore Mangin

Chapitre TS-2

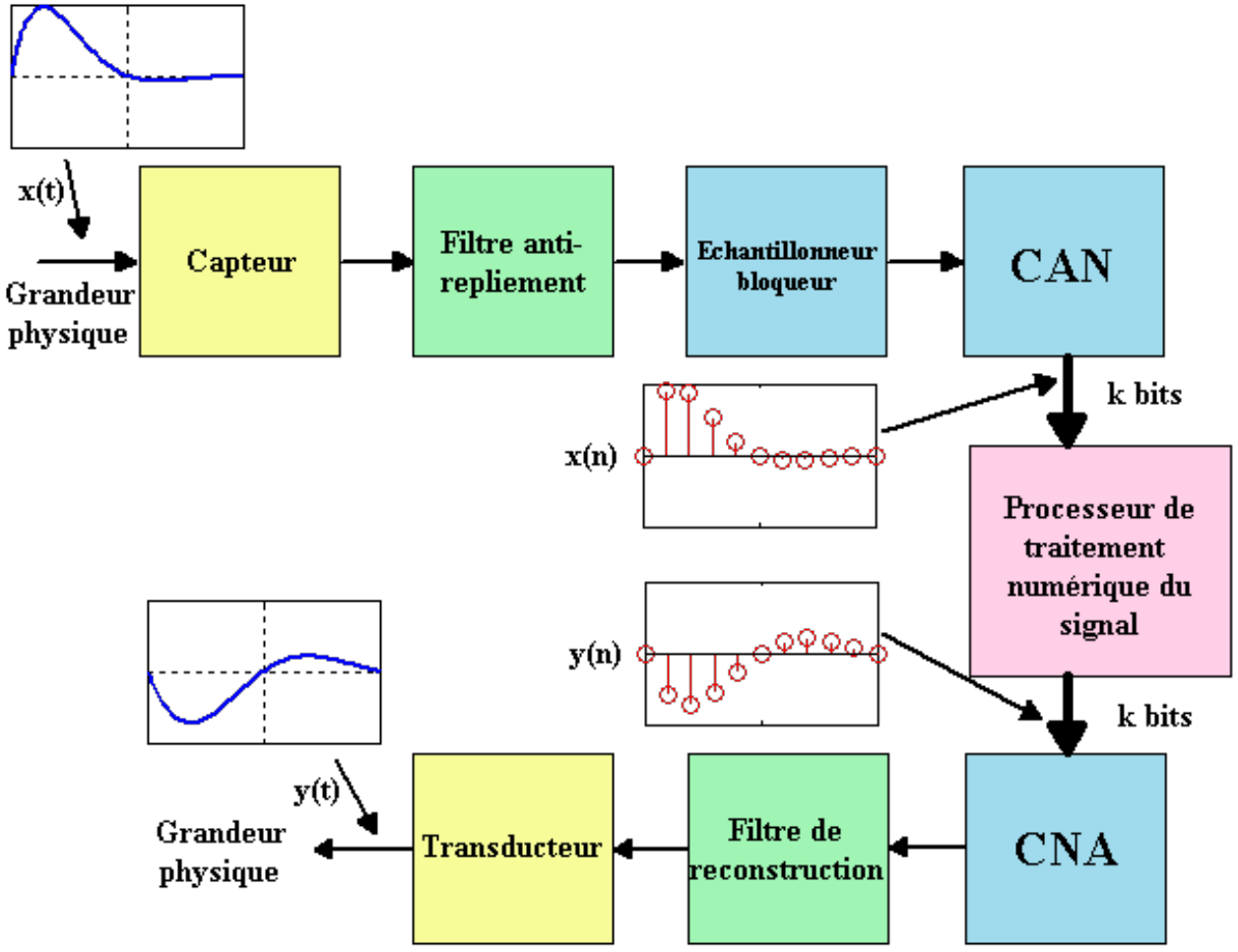
Échantillonnage et filtrage numérique

Dans ce chapitre, nous allons faire une introduction à l'électronique numérique. Jusqu'à présent, nous avons observé et modifié par filtrage des signaux analogiques décrits par une fonction continue du temps.

Les signaux numériques sont décrits par une suite de 0 et 1. Ils peuvent être facilement stockés, modifiés par filtrage numérique, et ensuite transformés en signaux analogiques.

I Chaîne de traitement numérique du signal : exemple

I.1 Schéma bloc



I.2 Les étapes

Pour transformer un signal analogique continu $x(t)$ en un signal numérique on applique :

- un filtre anti-repliement dont on parlera par la suite ;
- puis on échantillonne le signal continu grâce à une horloge ;
- enfin on numérise chaque valeur grâce à un Convertisseur Analogique Numérique (CAN) encodant la valeur sur N bits.

Ce signal numérique peut subir un traitement numérique, par exemple une étape de filtrage numérique.

Enfin le signal numérique traité est converti en un signal en forme de marche d'escalier par un Convertisseur Numérique Analogique (CNA). Ce signal entre dans un filtre afin d'avoir un signal analogique lissé (filtre passe-bas).

II Échantillonnage

II.1 Signal échantillonné

Définition n°1 Échantillonnage

L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs du signal continu $s(t)$ à des instants t_k régulièrement espacés $t_k = kT_e$ où $k \in [\![0, N-1]\!]$, avec N le nombre d'échantillons et T_e la période d'échantillonnage. On notera $f_e = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage.

Définition n°2 Signal de commande

Le signal $s(t)$ à échantillonner est multiplié par un signal de commande $K(t)$ de période T_e.
Dans le cas idéal, il s'agit d'un peigne de Dirac :

$$K(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(t - kT_e)$$

Le signal échantillonné s_E s'écrit alors

$$\boxed{s_E = s(t) \times K(t)}$$

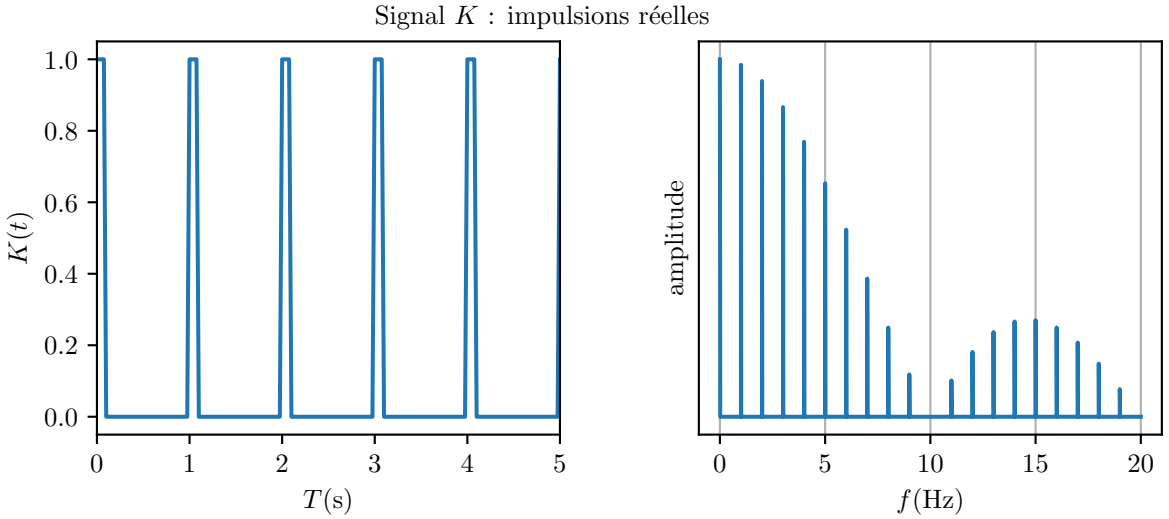
Remarque : En réalité, le signal de commande $K(t)$ correspond à des impulsions de largeur t_0 et de période T_e.

II.2 Spectre du signal de commande

Considérons un signal de commande réel de type impulsions de largeur t_0 et de période $T_e = 1/F_e$. L'impulsion a une tension $A = 1\,\text{V}$ pour les graphiques. Sa décomposition en série de Fourier s'écrit

$$K(t) = K_0 + \sum_{m=1}^{\infty} K_m \cos(2\pi m F_e t) \quad \text{avec} \quad K_m = 2\frac{At_0}{T_e}\frac{\sin(m\pi F_e t_0)}{m\pi F_e t_0}$$

La figure suivante représente un signal impulsionnel avec $t_0 = T_e/10$ et $T_e = 1\,\text{s}$, ainsi que son spectre fréquentiel.

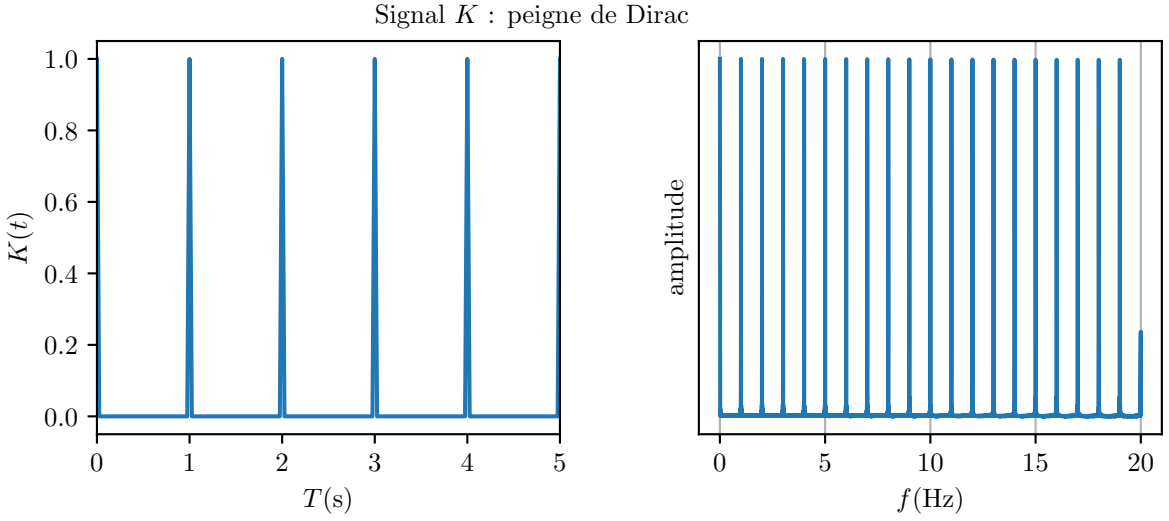


Dans le cas d'un signal de commande type peigne de Dirac, cela revient à faire tendre t_0 vers 0. En effectuant un DL de l'expression de K_m avec $t_0 \ll T_e$, soit $F_e t_0 \ll 1$:

$$K_m \approx 2\,\frac{At_0}{T_e}\,\frac{m\pi F_e t_0}{m\pi F_e t_0} = 2\,\frac{At_0}{T_e} = \text{cste}$$

On en déduit la DSF d'un peigne de Dirac de fréquence F_e :

$$\boxed{K(t) = K_0 + 2\,\frac{At_0}{T_e}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\left(2\pi m F_e t\right)}$$



II.3 Spectre du signal échantillonné

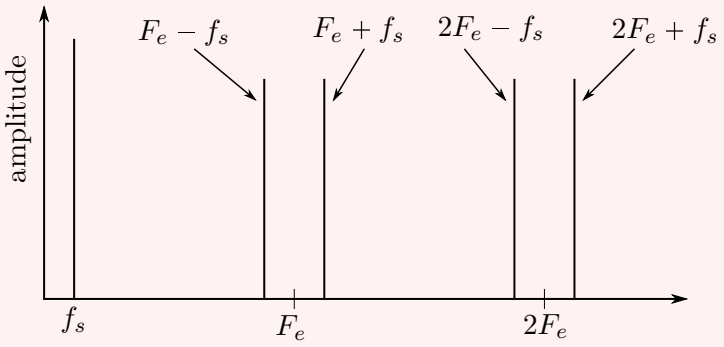
Définition n°3 Spectre de s_E

Considérons un signal $s(t)$ sinusoïdal de fréquence f_s :

$$s(t) = S_0 \cos(2\pi f_s t)$$

On échantillonne ce signal par un signal de commande $K(t)$ de type peigne de Dirac de fréquence F_e. Le spectre du signal échantillonné est constitué

- d'un pic à f_s correspondant à l'information du signal analogique $s(t)$;
- des pics de même amplitude à $|mF_e - f_s|$ et à $mF_e + f_s$ non souhaités.



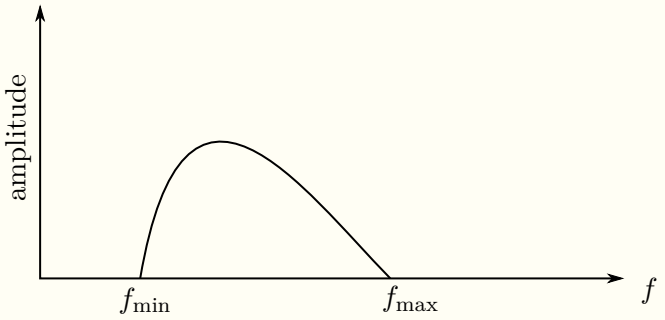
Demonstration

1. On rappelle la DSF du signal de commande :

$$K(t) = K_0 + 2\frac{At_0}{T_e}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\left(2\pi m F_e t\right)$$

   Déterminer l'expression du signal échantillonné $s_E(t)$. En déduire son spectre fréquentiel.

2. Comment est modifié le spectre de $s_E(t)$ si le signal $s(t)$ est un signal quelconque dont le spectre fréquentiel est continu entre $f_{\min}$ et $f_{\max}$? On fera un schéma du spectre de s_E pour un signal s de spectre suivant :



   On envisagera deux situations et on précisera laquelle est préférable pour extraire facilement le spectre fréquentiel du signal s à partir de celui de s_E.

II.4 Condition de Nyquist-Shannon

Si le spectre du signal d'entrée $s(t)$ s'étend de $f_{\min}$ à $f_{\max}$, les fréquences rajoutées par l'échantillonnage appartiennent à l'intervalle $[F_e - f_{\max}, F_e - f_{\min}]$ (en supposant $F_e > f_{\max}$). Pour que ces fréquences ne viennent pas se superposer à celles du spectre, il faut que

$$F_e - f_{\max} > f_{\max} \quad \text{soit} \quad \boxed{F_e > 2f_{\max}}$$

Cela correspond à prendre au minimum 2 échantillons par période ($T_e < T_{\max}/2$).

Définition n°4 Critère de Nyquist-Shannon

Pour que l'échantillonnage d'un signal ne modifie pas son spectre, il faut que la fréquence d'échantillonnage F_e vérifie la condition

$$\boxed{F_e > 2f_{\max}}$$

avec $f_{\max}$ la fréquence maximale dans le spectre du signal.

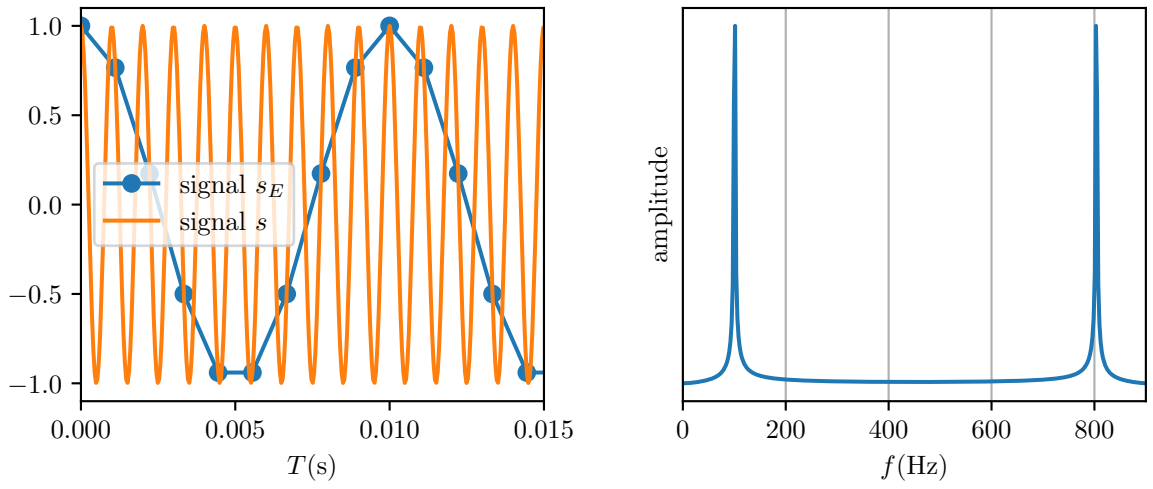
Remarque : Avec seulement 2 points enregistrés par période, on est capable de reconstruire le signal analogique initial !

Définition n°5 Filtre anti-repliement

Pour éviter le recouvrement de spectre, il faut respecter la condition de Nyquist-Shannon. On peut aussi rajouter systématiquement à l'entrée du convertisseur un filtre anti-repliement qui va limiter la fréquence du signal d'entrée à $f_{\max} = F_e/2$.
Ce filtre est donc un passe-bas de fréquence de coupure $f_c = F_e/2$.

Application n°1 : Sinusoïde sous-échantillonnée ✍

On considère un signal sinusoïdal s de fréquence $f_s = 1000\,\text{Hz}$ que l'on échantillonne avec une fréquence $F_e = 900\,\text{Hz}$. On donne la représentation temporelle de $s(t)$ et du signal échantillonné s_E ainsi que le spectre fréquentiel.



1. Justifier les pics du spectre fréquentiel.
2. Quel aurait été le spectre fréquentiel observé si on avait appliqué un filtre anti-repliement ? Que dire du signal échantillonné $s_E(t)$.

Définition n°6 Sous-échantillonnage

On parle de sous-échantillonnage lorsque le critère de Nyquist-Shannon n'est pas respecté, i.e. $F_e < 2f_{\max}$. On aura alors dans le spectre des fréquences f_s, $|mF_e - f_s|$ et $mF_e + f_s$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Dans le domaine temporel, cela signifie que le signal échantillonné possède moins de 2 points par période du signal à traiter.

II.5 Choix des paramètres d'une acquisition numérique

Définition n°7 Compromis entre T_e et N

Pour effectuer l'acquisition numérique d'un signal analogique, il faut choisir

- la période d'échantillonnage T_e ;
- le nombre de points N (ou la durée totale d'acquisition $T_a = (N-1)T_e$).

Pour respecter le critère de Nyquist-Shannon, il faut

$$\boxed{F_e = \frac{1}{T_e} > 2f_{\max}}$$

La résolution fréquentielle est $\boxed{\Delta f = \frac{1}{NT_e} \approx \frac{1}{T_a}}$. C'est l'écart minimal entre deux fréquences du spectre calculé. Elle est d'autant plus importante que N est grand (durée totale d'acquisition grande).
Ainsi les deux critères tendent à augmenter le nombre de points d'acquisition N mais on est limité par les capacités de stockage ou le débit de la transmission. Il faut donc trouver un compromis.

Application n°2 : Débit d'une connexion internet ✍

1. Un internaute souhaite écouter de la musique en « streaming ». Il dispose d'un débit de 1 Mb/s. Étant amateur de HiFi (restitution haute fidélité avec encodage sur 16 bits, sans compression, en stéréo donc sur deux canaux, et comportant la totalité du spectre audible), il souhaite calculer si son débit est suffisant. Pouvez-vous l'aider ?
2. Il constate qu'il peut téléphoner sans problème avec sa connexion internet. La fréquence d'échantillonnage est de 8 kHz avec une quantification sur 8 bits sur 1 canal. Calculer le débit nécessaire correspondant. Que devient un son de 7 kHz (donc audible) après échantillonnage ? Quelle solution proposez-vous ?

III Filtrage numérique (application en TP)

III.1 Passe-bas du premier ordre

Définition n°8 Schéma numérique du passe-bas d'ordre 1

Un filtre analogique passe-bas d'ordre un est décrit par

- la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{1}{1 + j\omega/\omega_c}$;
- l'équation différentielle $\dfrac{1}{\omega_c}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t) = e(t)$.

Un filtre numérique passe-bas d'ordre un appliqué à un signal échantillonné e_k avec $e_k = e(t_k)$ et $t_k = kT_e$ est décrit par la relation de récurrence (méthode d'Euler explicite ou des différences finies) :

$$\boxed{s_{k+1} = s_k + \omega_c T_e (e_k - s_k)}$$

Demonstration ✍

1. Effectuer un DL à l'ordre 1 de $s(t_{k+1}) = s(t_k + T_e)$ autour de t_k. En déduire une approximation de $s'(t_k)$.
2. En déduire le schéma numérique du filtrage passe-bas.

Remarque : Pour faire un lissage, on peut faire une moyenne glissante

$$s_k = \frac{e_{k-1} + e_k + e_{k+1}}{3}$$

III.2 Filtre d'ordre 2

Définition n°9 Discrétisation de la dérivée seconde

La discrétisation de la dérivée seconde $s''(t_k)$ s'écrit

$$s''(t_k) \approx \frac{s(t_{k+1}) + s(t_{k-1}) - 2s(t_k)}{T_e^2}$$

avec T_e le pas de discrétisation.

Demonstration ✍

1. Écrire les DL de $s(t_{k+1})$ et $s(t_{k-1})$ à l'ordre 2. En déduire l'expression approchée de $s''(t_k)$.

Application n°3 : Passe-bas d'ordre 2 ✍

1. Rappeler la fonction de transfert d'un passe-bas d'ordre 2 de gain statique $G_0 = 1$. En déduire l'équation différentielle.
2. Établir la relation de récurrence donnant s_{k+1} en fonction de s_k, s_{k-1} et e_k.