

Feuille d'exercices n°03

Exercice 1 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et a réel. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at} dt$ convergente. Montrer que pour tout $x \geq a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge.

Corrigé : Par continuité de f , on a $F : y \mapsto \int_0^y f(t)e^{-at} dt$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x > a$, on note $\delta = x - a > 0$. On a $F(y) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-at} dt$ d'où $F(y) = O(1)$ et par conséquent

$$F(y)e^{-\delta y} \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad F(t)e^{-\delta t} = O(e^{-\delta t}) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc le crochet $[F(t)e^{-\delta t}]_0^{+\infty}$ est fini et $\int_0^{+\infty} F(t)e^{-\delta t} dt$ converge. Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, on conclut

Pour $x \geq a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge.

Exercice 2 (****)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R})$ intégrable.

1. On suppose f uniformément continue. Montrer $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

2. On suppose désormais f de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \mapsto \int_x^{x+1} f'(t)^2 dt$ bornée. Montrer $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Corrigé : 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $x \geq 0$. On a $\forall t \in [x; x + \eta] \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$

Ainsi, par inégalité triangulaire

$$\left| f(x) - \frac{1}{\eta} \int_x^{x+\eta} f(t) dt \right| = \frac{1}{\eta} \left| \int_x^{x+\eta} (f(x) - f(t)) dt \right| \leq \frac{1}{\eta} \int_x^{x+\eta} |f(x) - f(t)| dt \leq \varepsilon$$

d'où $|f(x)| \leq \left| f(x) - \frac{1}{\eta} \int_x^{x+\eta} f(t) dt \right| + \frac{1}{\eta} \left| \int_x^{x+\eta} f(t) dt \right| \leq \varepsilon + \frac{1}{\eta} \left| \int_x^{x+\eta} f(t) dt \right|$

Or $\int_x^{x+\eta} f(t) dt = \int_0^{x+\eta} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) dt = 0$

Ainsi, il existe un seuil $A \geq 0$ tel que, pour $x \geq A$, on ait $|f(x)| \leq 2\varepsilon$, autrement dit

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

2. Soit $y > x$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_x^y f'(t)^2 dt} \sqrt{\int_x^y 1 dt}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left| \int_x^{x+1} f'(t)^2 dt \right| \leq M \quad \text{avec} \quad M \geq 0$

Puis, notant $p = \lfloor y - x \rfloor$, on a

$$\int_x^y f'(t)^2 dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{x+k}^{x+k+1} f'(t)^2 dt + \int_{x+p}^y f'(t)^2 dt \leq (p+1)M \leq M(y-x+1)$$

Ainsi $|f(y) - f(x)| \leq \sqrt{M} \sqrt{(y-x+1)(y-x)}$

Notant $\omega(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}$, on a $\omega(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} o(1)$ et l'uniforme continuité en découle. Par application du résultat précédent, on conclut

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

Exercice 3 (***)

On note $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$

1. Justifier la convergence de I et J et établir l'égalité $I = J$.

2. En déduire la valeur de I et J.

Corrigé : 1. Notons $f(t) = \ln(\sin(t))$ pour $t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$. On a $f \in \mathcal{C}^0 \left(\left] 0; \frac{\pi}{2} \right], \mathbb{R} \right)$. Avec le développement usuel $\sin(t) = t + o(t)$, il vient

$$\ln(\sin(t)) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction f est intégrable sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right]$. Avec le changement de variables $t = \frac{\pi}{2} - u$, les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) du$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Ainsi

$$\boxed{\text{Les intégrales } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt \text{ sont convergentes et égales.}}$$

2. Par linéarité de l'intégrale car convergence, on a

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\ln(\sin(t)) + \ln(\cos(t))] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t) \cos(t)) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right) dt$$

Toujours par linéarité $I + J + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) dt$

Avec le changement de variables $u = 2t$, les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t)) \, dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(u)) \, du$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Ainsi

$$2 \left(I + J + \frac{\pi}{2} \ln(2) \right) = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t)) \, dt$$

D'après la relation de Chasles, il vient

$$2 \left(I + J + \frac{\pi}{2} \ln(2) \right) - I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t)) \, dt$$

Un dernier changement de variable $t = u + \frac{\pi}{2}$ fournit l'égalité

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(t)) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} + u \right) \right) \, du = J$$

Ainsi

$$2 \left(I + J + \frac{\pi}{2} \ln(2) \right) - I = J \quad \text{et} \quad I = J$$

On conclut

$$I = J = -\frac{\pi \ln(2)}{2}$$

Exercice 4 (***)

On pose $\forall x > 0 \quad F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1 + \sin(t^2)}{t^2} \, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

1. Justifier que F et G sont bien définies.
2. Montrer $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} G(x)$. Les intégrandes sont-ils également équivalents en $+\infty$?

Corrigé : 1. Notons $f(t) = \frac{1 + \sin(t^2)}{t^2}$ et $g(t) = \frac{1}{t^2}$ pour $t > 0$. On a f et g continues sur $]0; +\infty[$ avec

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \quad g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions F et G sont bien définies sur }]0; +\infty[.}$$

2. On a $\frac{\sin(t^2)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Par linéarité car convergence, on obtient

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} + \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2} \, dt$$

Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto -\cos(t^2)$ et $t \mapsto \frac{1}{2t^3}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ avec

$$-\frac{\cos(t^2)}{2t^3} \xrightarrow{t \rightarrow x} -\frac{\cos(x^2)}{2x^3} \quad \text{et} \quad -\frac{\cos(t^2)}{2t^3} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2} \, dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{3 \cos(t^2)}{2t^4} \, dt$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{t^2} dt = \left[-\frac{\cos(t^2)}{2t^3} \right]_x^{+\infty} - \frac{3}{2} \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^4} dt$$

puis
$$\frac{\cos(x^2)}{2x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et
$$\frac{\cos(t^2)}{t^4} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

d'où, par intégration de relation de comparaison

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{t^4} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi
$$F(x) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{1}{x}$$

Et par conséquent

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} G(x)}$$

En revanche
$$\frac{1 + \sin(t^2)}{t^2} \not\sim \frac{1}{t^2}$$

puisque $t \mapsto \sin(t^2)$ ne tend pas vers zéro en $+\infty$. Ainsi, les intégrandes ne sont pas équivalents.

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pour $x > 0$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(t) dt$$

Corrigé : 1. Notons $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour $x \geq 0$. D'après le théorème fondamental d'analyse, on a $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec $F' = f$. Par suite

$$\forall x > 0 \quad g(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} F'(0) = f(0)$$

Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ se prolonge par continuité en 0.}}$$

2. On procède par intégration par parties. On a

$$\int^x g(t)^2 dt = \left[-\frac{F(x)^2}{x} \right] + \int^x \left[\frac{2f(t)}{t} \int_0^t f(u) du \right] dt$$

en particulier
$$\frac{F(x)^2}{x} = x \left(\frac{F(x)}{x} \right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

d'où
$$\forall a \geq 0 \quad \int_0^a g(x)^2 dx = -\frac{F(a)^2}{a} + 2 \int_0^a g(x)f(x) dx \leq 2 \int_0^a g(x)f(x) dx$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\forall a \geq 0 \quad \left(\int_0^a g(x)^2 dx \right)^2 \leq 4 \left(\int_0^a g(x)f(x) dx \right)^2 \leq 4 \int_0^a g(x)^2 dx \int_0^a f(x)^2 dx$$

En supposant f non identiquement nulle et par conséquent g non plus, on obtient

$$\forall a \geq 0 \quad \int_0^a g(t)^2 dt \leq 4 \int_0^a f(x)^2 dx$$

On conclut

La fonction g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\int_0^{+\infty} g(t)^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$.

Exercice 6 (***)

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt, \quad J_n = \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$

1. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$
2. Justifier que I_n et J_n sont bien définies pour tout n entier.
3. Pour n entier, calculer $I_{n+1} - I_n$ puis en déduire la valeur de I_n pour tout n entier.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; \pi], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = 0$$

5. On pose $f(t) = \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{2}{t}$ pour $t \in]0; \pi]$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1([0; \pi], \mathbb{R})$.
6. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Corrigé : 1. On choisit une primitive de $\sin$ qui s'annule en 0, à savoir $t \mapsto 1 - \cos(t)$. Les fonctions $t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. On a

$$\frac{1 - \cos(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(t)}{t} = O\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, le crochet $\left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]$ admet des limites finies en 0 et $+\infty$. D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} -\frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ sont de même nature. L'intégrande de cette dernière intégrale est continu sur $]0; +\infty[$ et on a

$$-\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve la convergence de $\int_0^{+\infty} -\frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ et par conséquent

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

2. Les fonctions $\left(t \mapsto \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)$ et $\left(t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}\right)$ sont continues respectivement sur $]0; \pi]$ et $]0; (n + \frac{1}{2})\pi]$. Au voisinage de zéro, avec l'équivalent usuel $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, on trouve

$$\frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{(n + \frac{1}{2})t}{\frac{t}{2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2(n + \frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

Ainsi, les deux intégrandes sont prolongeables par continuité en zéro donc les intégrables définissant I_n et J_n sont faussement impropres d'où

Les intégrales définissant I_n et J_n sont bien définies pour tout n entier.

3. Par trigonométrie, on a

$$\forall (p, q) \in \mathbb{R}^2 \quad \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Par linéarité car convergence, on trouve pour n entier

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} [\sin\left((n + \frac{3}{2})t\right) - \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)] dt$$

Avec le résultat de la question précédente, on obtient

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos((n+1)t) dt = 2 \int_0^\pi \cos((n+1)t) dt = 2 \left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1} \right]_0^\pi$$

Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} - I_n = 0$$

Ainsi, la suite $(I_n)_n$ est constante et on a

$$I_0 = \int_0^\pi \frac{\sin \frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

On conclut

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \pi$$

4. En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(t) \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt &= \left[f(t) \frac{-\cos\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{n + \frac{1}{2}} \right]_0^\pi + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi f'(t) \cos\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt \\ &= \frac{f(0)}{n + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi f'(t) \cos\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$0 \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \left| \int_0^\pi f'(t) \cos\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt \right| \leq \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_0^\pi |f'(t)| dt = o(1)$$

Ainsi, faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt = 0$$

5. On a $\forall t \in]0; \pi] \quad f(t) = \frac{t - 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t \sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

La fonction $f \in \mathcal{C}^1(]0; \pi], \mathbb{R})$ comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Avec un développement de $\sin$ à l'ordre 2, on trouve

$$\forall t \in]0; \pi] \quad f(t) = \frac{t - t + o(t^2)}{t \sin \frac{t}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{o(t^2)}{\frac{t^2}{2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = f(0)$$

Ainsi, on a $f \in \mathcal{C}^1(]0; \pi], \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0([0; \pi], \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall t \in]0; \pi] \quad f'(t) = \frac{4 - 4 \cos \left(\frac{t}{2}\right)^2 - t^2 \cos \left(\frac{t}{2}\right)}{2t^2 \sin \left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

On a
$$2t^2 \sin \left(\frac{t}{2}\right)^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2t^2 \times \frac{t^2}{4} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^4}{2}$$

Avec un développement de cos aux ordres 4 et 2 respectivement, on trouve

$$4 - 4 \cos \left(\frac{t}{2}\right)^2 - t^2 \cos \left(\frac{t}{2}\right) = 4 - 4 \left(1 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{4!2^4}\right) - t^2 \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) + o(t^4) = \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$$

Par suite
$$f'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{t^4}{24}}{\frac{t^4}{2}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{12}$$

D'après le théorème de limite de la dérivée, on a f dérivable en 0 et f' continue en 0 d'où

La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi]$.

6. On applique le résultat de la question 5 avec la fonction f introduite à la question 6 et on trouve par linéarité de l'intégrale car convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin \left((n + \frac{1}{2})t\right) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(I_n - 2 \int_0^\pi \frac{\sin \left((n + \frac{1}{2})t\right)}{t} dt \right) = 0$$

Or on sait que $I_n = \pi$ pour tout n entier et en posant $u = (n + \frac{1}{2})t$, il vient

$$\int_0^\pi \frac{\sin \left((n + \frac{1}{2})t\right)}{t} dt = J_n$$

On conclut

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 7 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[,]0; +\infty[)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a \quad \text{avec} \quad a < 0$$

Montrer que f et f' sont intégrables sur $[0; +\infty[$.

Corrigé : On a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a$$

Quitte à multiplier par -1 , on peut se ramener au cas d'une constante positive. L'intégrale $\int_0^{+\infty} a dt$ diverge clairement et par intégration des relations de comparaison, il vient

$$\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^x a dt = ax$$

c'est-à-dire
$$\ln \left(\frac{f(x)}{f(0)} \right) = ax + o(x)$$

d'où
$$\ln(x^2 f(x)) = 2 \ln(x) + ax + o(x) - \ln(f(0)) = ax + o(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

autrement dit
$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

et
$$f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} af(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

On conclut Les fonctions f et f' sont intégrables sur $[0; +\infty[.$