

## Feuille d'exercices n°01

### Exercice 1 (\*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$

3.  $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$

5.  $\int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{1}{t})} dt$

2.  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}}$

4.  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$

6.  $\int_0^1 \frac{dt}{\ln(t)}$

### Exercice 2 (\*\*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1.  $\int_0^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$

3.  $\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{t}-1}{\ln(t)} dt$

5.  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)}$

2.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos(t)}$

4.  $\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt$

6.  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t) - \cos(t)}{t^2} dt$

### Exercice 3 (\*)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2}$

2.  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1}$

3.  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + \ln(t)^2)}$

### Exercice 4 (\*\*)

On pose  $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} dt$

1. Justifier que  $I_n$  est bien définie pour tout  $n$  entier.
2. Pour  $n$  entier non nul, déterminer une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$ .
3. En déduire une expression de  $I_n$  pour tout  $n$  entier.

### Exercice 5 (\*\*)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$

2.  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

3.  $\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-t} dt$

### Exercice 6 (\*\*)

On pose  $\forall a > 0 \quad I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt$

1. Justifier que  $I(a)$  est bien définie pour tout  $a > 0$ .
2. Calculer  $I(1)$ .
3. En déduire la valeur de  $I(a)$  pour tout  $a > 0$ .

### Exercice 7 (\*\*)

1. Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1 + t^4}$ .

2. Établir  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1 + t^4}$

3. En déduire  $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1 + t^4}$  puis  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} dt$ .

### Exercice 8 (\*\*)

Montrer  $\int_0^x \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$

### Exercice 9 (\*)

Déterminer un équivalent simple pour  $x \rightarrow +\infty$  de  $\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3} dt$ .