

Feuille d'exercices n°02

Exercice 1 (**)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \qquad 2. \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{\frac{3}{2}}} dt \qquad 3. \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{2} + \cos(t)}$$

Exercice 2 (**)

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge et préciser sa valeur en cas de convergence.
2. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} dt$ et $\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-xt} dt$ avec $x > 0$.

Exercice 3 (**)

Pour $x \geq 0$, on pose
$$\Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

1. Justifier que Φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ puis déterminer un équivalent de $\Phi(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.
2. Établir la convergence de $\int_0^{+\infty} \Phi(x) dx$ et calculer cette intégrale.

Exercice 4 (***)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th}(t)) dt \qquad 3. \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt$$
$$2. \int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt \qquad 4. \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$$

Exercice 5 (Intégrales de Bertrand ***)

Étudier, en fonction des réels α et β , la nature de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln(t)^\beta}$.

Exercice 6 (***)

Déterminer la nature des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\right) dt$$

puis commenter.

Exercice 7 (***)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que f admet une limite finie en $+\infty$ et $a > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [f(t+a) - f(t)] dt$ converge.
2. Déterminer $\int_0^{+\infty} [\text{Arctan}(t+1) - \text{Arctan}(t)] dt$.

Exercice 8 (***)

On pose $\forall x \in]-1; 1[\quad F(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{1 - x \cos(t)}$

Justifier que F est bien définie sur $] -1; 1 [$ puis déterminer une expression simple de $F(x)$ pour $x \in] -1; 1 [$.

Exercice 9 (***)

1. Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} dt$
2. Montrer que $\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{\cos(t)}{t} dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} I$ puis en déduire la valeur de I .

Exercice 10 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([0; 1], \mathbb{R})$ décroissante positive. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Montrer que f est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $(S_n)_n$ converge et dans ce cas

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$$