

Feuille d'exercices n°03

Exercice 1 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et a réel. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at} dt$ convergente. Montrer que pour tout $x \geq a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge.

Indications : Poser $F : y \mapsto \int_0^y f(t)e^{-at} dt$ puis considérer $\int_0^{+\infty} F(t)e^{-\delta t} dt$ avec $\delta = x - a > 0$.

Exercice 2 (****)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R})$ intégrable.

1. On suppose f uniformément continue. Montrer $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
2. On suppose désormais f de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \mapsto \int_x^{x+1} f'(t)^2 dt$ bornée. Montrer $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Indications : 1. Pour $x \geq 0$, majorer $|f(x)|$ en intégrant f sur un intervalle suffisamment petit.
2. Pour $y \geq x$, écrire $f(y) - f(x)$ comme une intégrale puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et ensuite la relation de Chasles.

Exercice 3 (***)

On note
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t)) dt$$

1. Justifier la convergence de I et J et établir l'égalité $I = J$.
2. En déduire la valeur de I et J .

Indications : 1. Établir que $\ln(\sin(t)) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ puis utiliser le changement de variables $t = \frac{\pi}{2} - u$.
2. Calculer $I + J$ puis utiliser des transformations trigonométriques.

Exercice 4 (***)

On pose $\forall x > 0 \quad F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1 + \sin(t^2)}{t^2} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

1. Justifier que F et G sont bien définies.
2. Montrer $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} G(x)$. Les intégrandes sont-ils également équivalents en $+\infty$?

Indications : 2. Procéder par intégration par parties pour $F(x)$.

Exercice 5 (****)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ pour $x > 0$.

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2(t) dt$$

Indications : 1. Notant $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour $x \geq 0$, reconnaître un taux d'accroissement.
2. En intégrant par partie, déterminer une primitive de g^2 en fonction de F . En déduire que pour $a \geq 0$, on a $\int_0^a g^2(x) dx \leq 2 \int_0^a g(x)f(x) dx$ puis exploiter l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 6 (***)

On pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt, \quad J_n = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$

1. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$
2. Justifier que I_n et J_n sont bien définies pour tout n entier.
3. Pour n entier, calculer $I_{n+1} - I_n$ puis en déduire la valeur de I_n pour tout n entier.
4. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; \pi], \mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt = 0$$

5. On pose $f(t) = \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{2}{t}$ pour $t \in]0; \pi]$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^1([0; \pi], \mathbb{R})$.
6. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Indications : 1. Utiliser le théorème d'intégration par parties en considérant une primitive de $t \mapsto \sin t$ qui s'annule en 0.

2. Utiliser l'équivalent usuel $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.
3. Pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, déterminer une expression de $\sin(p) - \sin(q)$ sous forme de produit.
4. Intégrer par parties.
5. Appliquer le théorème de limite de la dérivée.

Exercice 7 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[,]0; +\infty])$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a \quad \text{avec} \quad a < 0$$

Montrer que f et f' sont intégrables sur $[0; +\infty[$.

Indications : Intégrer une relation de comparaison.