M-1 : Référentiels non galiléens

I Rappels de cinématique . . . 3
I.1 Référentiel . . . 3
I.2 Cinématique du point matériel . . . 3
a) En coordonnées cartésiennes . . . 3
b) En coordonnées cylindriques . . . 5
I.3 Cinématique du solide . . . 7
a) Définition d'un solide . . . 7
b) Mouvement de translation . . . 7
c) Mouvement de rotation autour d'un axe fixe . . . 9
I.4 Mouvements relatifs de référentiels . . . 11
a) Cas d'une translation . . . 11
b) Cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe . . . 11
II Lois de composition des vitesses et des accélérations . . . 11
II.1 Dérivée d'un vecteur dans $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$ . . . 11
II.2 Cas où $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$ . . . 13
II.3 Cas où $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à $\mathcal{R}$ . . . 15
II.4 Cas général (HP) . . . 17
III Dynamique en référentiel non galiléen . . . 19
III.1 Forces d'inertie . . . 19
III.2 Seconde loi de Newton dans $\mathcal{R}'$ non galiléen . . . 19
III.3 Théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}'$ non galiléen . . . 21
III.4 Théorèmes énergétiques dans $\mathcal{R}'$ non galiléen . . . 23
IV Exemples de manifestation du caractère non galiléen des référentiels terrestre et géocentrique . . . 29
IV.1 Définition des référentiels . . . 29
IV.2 Conséquences de la rotation propre de la Terre . . . 29
a) Définition du poids . . . 29
b) Effets de la force de Coriolis . . . 31
IV.3 Conséquences de la translation elliptique de la Terre : force de marées . . . 33

MP 2026-2027
Aurore Mangin

Chapitre M-1

Référentiels non galiléens

Revoir le I et préparer les applications correspondantes.

I Rappels de cinématique

La cinématique permet de décrire le mouvement d'un système (point matériel ou solide) dans un référentiel d'étude. Pour ce faire, il faut connaitre l'expression du vecteur position au cours du temps. Celui-ci peut être obtenu par intégration des vecteurs accélération et vitesse, connaissant les conditions initiales.

Nous allons rappeler la définition d'un référentiel, puis les vecteurs position, vitesse et accélération selon le système d'étude et le système de coordonnées.

I.1 Référentiel

Définition n°1 Référentiel

On appelle référentiel $\mathcal{R}$ un repère lié à l'observateur ou un solide, ce dernier étant muni d'une horloge pour mesurer le temps.

Remarque : Le référentiel d'étude doit toujours être précisé, car selon sa nature, le mouvement du point matériel étudié peut changer.

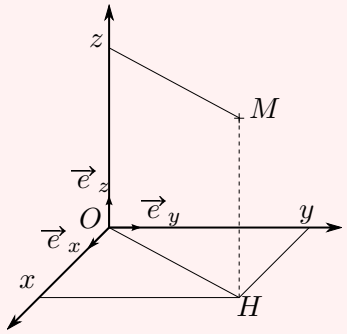
Remarque : On se place dans le cadre de la mécanique classique newtonienne, donc non relativiste. Ainsi le temps est absolu, i.e. le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels.

I.2 Cinématique du point matériel

a) En coordonnées cartésiennes

Définition n°2 Cinématique en cartésien

On note $(Oxyz)$ le repère cartésien fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$, de base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).



- Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
- Vecteur vitesse : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$
- Vecteur accélération : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$

Application n°1 : Mouvements classiques ✍

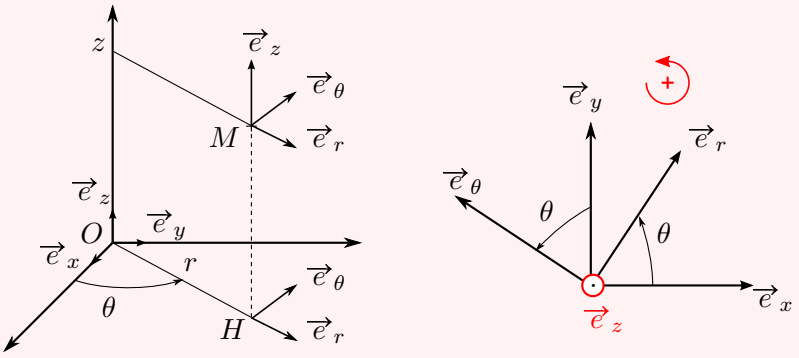
1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$. On prendra M en O à $t = 0$. Que vaut l'accélération ?
2. Exprimer les vecteurs vitesse et accélération dans le cas d'un mouvement à accélération constante $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$. On prendra $\vec{v}(t = 0) = v_{0,x} \vec{e}_x + v_{0,y} \vec{e}_y$ et $\overrightarrow{OM}(t = 0) = \vec{0}$. Établir l'équation de la trajectoire $x(y)$ et préciser sa nature.

b) En coordonnées cylindriques

Définition n°3 Cinématique en cylindrique

Le point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z), avec

- $r \geqslant 0$ la distance de M à l'axe (Oz),
- $\theta = (Ox, \overrightarrow{OH})$, avec H le projeté orthogonal de M sur le plan Oxy,
- z la coordonnée cartésienne de M sur l'axe Oz.



- Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z}$
- Vecteur vitesse : $\boxed{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z}$
- Vecteur accélération : $\boxed{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z}$

Remarque : On rappelle que

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

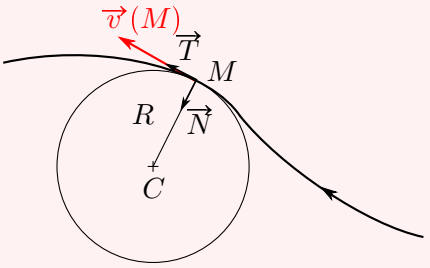
Application n°2 : Cas d'un mouvement circulaire ✍

1. Simplifier les expressions dans le cas d'un mouvement circulaire de rayon R. En posant $v = \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta$, donner l'expression de l'accélération en fonction de v, R, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.
2. Que dire pour un mouvement circulaire uniforme ?

Définition n°4 Repère de Frenet

Le repère de Frenet a pour origine le point M à l'instant t, et pour base orthonormée $(\vec{T}, \vec{N})$ telle que

- le vecteur $\vec{T} = \dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire en M et orienté dans le sens du mouvement ;
- le vecteur $\vec{N}$ est le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{T}$ et orienté vers le centre C du cercle localement tangent à la trajectoire dit *cercle osculateur* de rayon R.



On peut alors écrire les vecteurs vitesse et accélération

$$\boxed{\vec{v}(M) = v\,\vec{T} \quad \text{et} \quad \vec{a}(M) = \frac{v^2}{R}\vec{N} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T}}$$

Remarque : Dans le cas d'un mouvement circulaire, on a $\vec{T} = \vec{e}_\theta$ et $\vec{N} = -\vec{e}_r$.

I.3 Cinématique du solide

a) Définition d'un solide

Définition n°5 Solide indéformable

Soit S un solide constitué de points matériels M_i de masse m_i. Il est dit indéformable si

$$\forall (i, j \neq i)\ ||\overrightarrow{M_iM_j}(t)|| = cste.$$

Remarque : La position d'un solide est repérée par 6 paramètres :

- les 3 coordonnées d'un point du solide,
- et 3 angles.

b) Mouvement de translation

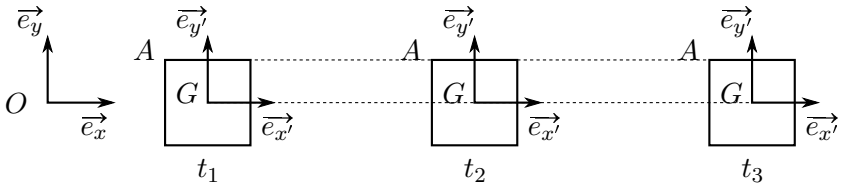
Définition n°6 Solide en translation

Un solide S est animé d'un mouvement de translation si tous les points de ce solide ont le même vecteur vitesse à chaque instant :

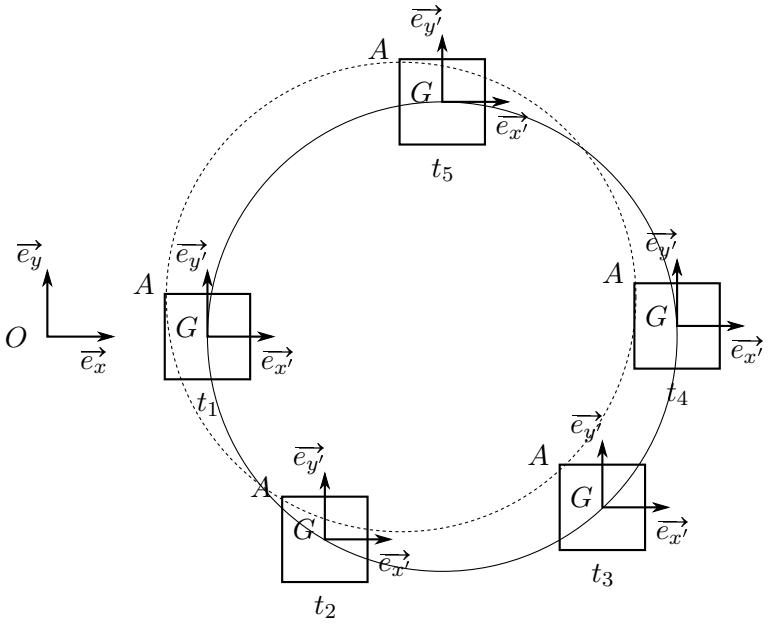
$$\boxed{\forall (A, B) \in S \quad \vec{v}(A, t) = \vec{v}(B, t)}$$

La nature de la translation (rectiligne, circulaire, elliptique, quelconque, uniforme ou non) est donnée par le mouvement d'un point du solide.

- Solide en translation rectiligne :



- Solide en translation circulaire :



Remarque : Chaque point du solide décrit un cercle de même rayon mais pas de même centre.

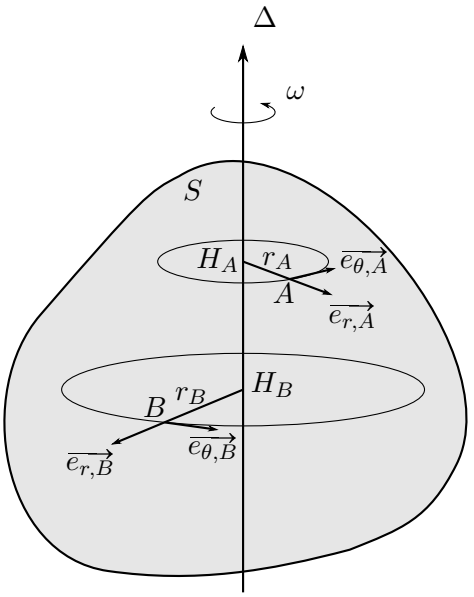
c) Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Définition n°7 Solide en rotation autour d'un axe fixe

Soit un axe Δ fixe dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$.
Un solide (S) est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ si tous les points du solide sont en mouvement circulaire autour de cet axe Δ à la même vitesse angulaire $\omega(t)$:

$$\boxed{\forall M \in S \quad \overrightarrow{v}(M) = r_M \omega(t) \overrightarrow{e_{\theta,M}}}$$

Remarque : Soient deux points A et B appartenant au solide S. Le point A décrit une trajectoire circulaire de centre H_A (projeté orthogonal de A sur Δ). De même le point B décrit une trajectoire circulaire de centre H_B (projeté orthogonal de B sur Δ).
On définit alors les bases cylindriques d'axe Δ liées à A et B : $(\overrightarrow{e_{r,A}}, \overrightarrow{e_{\theta,A}}, \overrightarrow{u_\Delta})$ pour A et $(\overrightarrow{e_{r,B}}, \overrightarrow{e_{\theta,B}}, \overrightarrow{u_\Delta})$ pour B.
Il faut définir des coordonnées cylindriques d'axe Δ pour tout point $M \in S$.



Remarque : Le mouvement général d'un solide est la combinaison d'une translation à la vitesse du barycentre (**mouvement d'ensemble**) et d'une rotation autour du barycentre (**mouvement propre**).

I.4 Mouvements relatifs de référentiels

a) Cas d'une translation

Définition n°8 Référentiel en translation par rapport à un autre

Un référentiel $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$ si le solide de référence S' de $\mathcal{R}'$ est en mouvement de translation dans $\mathcal{R}$. Cela signifie que les axes définissant $\mathcal{R}'$ conservent la même orientation par rapport à ceux de $\mathcal{R}$.
Par convention, on les choisit parallèles.
On définit alors la vitesse relative de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$: $\vec{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$.

Application n°3 : Chute d'une balle dans un train ✍

On note $\mathcal{R}$ le référentiel lié au sol et $\mathcal{R}'$ la référentiel lié au train en translation rectiligne par rapport à $\mathcal{R}$. On note $\vec{v}$ la vitesse du train dans $\mathcal{R}$.
Un enfant dans un wagon, immobile dans $\mathcal{R}'$, lâche une balle M sans vitesse initiale depuis une hauteur H.

1. Quelle est la trajectoire de M dans $\mathcal{R}'$ si $\vec{v} = \overrightarrow{\text{cste}}$?
2. Quelle est la trajectoire de M dans $\mathcal{R}$ si $\vec{v} = \overrightarrow{\text{cste}}$?
3. Quelle est la trajectoire de M dans $\mathcal{R}'$ si le train freine avec une accélération constante ? On attend une réponse qualitative.

Définition n°9 Référentiel barycentrique

Pour un solide, il peut être utile d'effectuer une étude mécanique dans son référentiel barycentrique $\mathcal{R}_G$ (noté aussi parfois $\mathcal{R}^*$).
Soit $\mathcal{R}(Oxyz)$ un référentiel de référence. Le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_G(Gxyz)$ est le référentiel ayant pour **origine le centre de masse** G du solide, et en **translation dans** $\mathcal{R}$ de vitesse $\vec{v}(G)_{\mathcal{R}}$.
Le **mouvement propre** est le mouvement du solide dans son référentiel barycentrique.
Le **mouvement d'ensemble** est le mouvement de $\mathcal{R}_G$ dans $\mathcal{R}$.

b) Cas d'une rotation uniforme autour d'un axe fixe

Définition n°10 Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

Un référentiel $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans $\mathcal{R}$ si le solide de référence S' de $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe dans $\mathcal{R}$.
On définit la rotation d'axe (Oz) repérée par un angle θ par le **vecteur rotation**

$$\boxed{\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \dot{\theta}\vec{e}_z}$$

II Lois de composition des vitesses et des accélérations

II.1 Dérivée d'un vecteur dans $\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}$

Définition n°11 Changement de référentiel pour la dérivée d'un vecteur

Soit un référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et un référentiel $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ de base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$.
Soit $\vec{A}$ un vecteur, alors

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}}$$

Demonstration ✍

On se place dans le cas simplifié de $\mathcal{R}'$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}$ avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \Omega \vec{e}_z$ et $\vec{e}_{z'} = \vec{e}_z$.

1. Montrer que $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{e}_{x'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{e}_{x'}$.
2. On suppose que cette relation reste vraie pour n'importe quel vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$. Montrer alors que

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{A}$$

II.2 Cas où $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$

Définition n°12 Loi de composition des vitesses

Soit $\mathcal{R}'(O'xyz)$ en translation par rapport à $\mathcal{R}(Oxyz)$. La vitesse d'un point M s'écrit

$$\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M) \quad \text{avec} \quad \vec{v}_e(M) = \vec{v}(O')_{\mathcal{R}}}$$

On appelle $\vec{v}_e(M)$ la vitesse d'entrainement.

Remarque : Dans le cas d'un référentiel en translation, la vitesse d'entrainement est indépendante du point M. Elle correspond à la vitesse du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à R :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

Demonstration ✍

1. Établir l'expression de la vitesse du point M dans $\mathcal{R}$.

Définition n°13 Point coïncident

La vitesse d'entrainement correspond à la vitesse du point coïncident P dans le référentiel $\mathcal{R}$

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(P)_{\mathcal{R}}$$

Le point coïncident du point M à un instant t est le point P fixe dans $\mathcal{R}'$ qui est confondu avec le point M à cet instant.

Remarque : À chaque instant t correspond un point coïncident différent.

Application n°4 : Roue de vélo ✍

Soit un vélo en translation rectiligne uniforme par rapport au sol. On note $\mathcal{R}(Oxyz)$ le référentiel lié au sol et $\mathcal{R}'(O'xyz)$ celui lié à la roue de vélo, où O' est le centre de la roue.
On note M un point à la périphérie de la roue.
On suppose que la roue roule sans glisser.

1. Quelle est la trajectoire de M dans $\mathcal{R}'$? dans $\mathcal{R}$?
2. Représenter pour différents instants le point coïncident de M. Préciser la vitesse de P dans $\mathcal{R}$. Commenter.

Définition n°14 Loi de composition des accélérations

Soit $\mathcal{R}'(O'xyz)$ en translation par rapport à $\mathcal{R}(Oxyz)$. L'accélération d'un point M s'écrit

$$\boxed{\vec{a}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(M) \quad \text{avec} \quad \vec{a}_e(M) = \vec{a}(O')_{\mathcal{R}}}$$

On appelle $\vec{a}_e(M)$ l'accélération d'entrainement. Il s'agit de l'accélération du point coïncident.

Demonstration ✍

1. Établir l'expression de l'accélération $\vec{a}(M)_{\mathcal{R}}$.

II.3 Cas où $\mathcal{R}'$ est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à $\mathcal{R}$

Définition n°15 Loi de composition des vitesses

Soit $\mathcal{R}'(Ox'y'z)$ en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) fixe dans $\mathcal{R}(Oxyz)$.
Le vecteur rotation s'écrit $\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega \vec{e}_z = \overrightarrow{\text{cste}}$.
La vitesse d'un point M s'écrit

$$\boxed{\vec{v}(M)_{\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \vec{v}_e(M) \quad \text{avec} \quad \vec{v}_e(M) = \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}}$$

Remarque : On remarque que la vitesse d'entrainement dépend ici du point M.

Demonstration ✍

1. Établir l'expression de $\vec{v}(M)_{\mathcal{R}}$.
2. On considère un solide S en rotation autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante. Le référentiel $R'(Ox'y'z')$ est le référentiel lié au solide S. Soit M un point de S. Quelle est la trajectoire de M dans $\mathcal{R}$? dans $\mathcal{R}'$? Définir le point coïncident P de M et préciser sa vitesse dans $\mathcal{R}$. Commenter.

Application n°5 : Enfant sur un manège ✍

Soit un manège en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de l'axe vertical (Gz) passant par son centre de masse G.
Un enfant part du centre G vers un point A à la périphérie avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_{x'}$ constante par rapport au manège.

1. Exprimer la vitesse de l'enfant dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol.

Définition n°16 Loi de composition des accélérations

Soit $\mathcal{R}'(Ox'y'z)$ en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) fixe dans $\mathcal{R}(Oxyz)$.
Le vecteur rotation s'écrit $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{\text{cste}}$.
L'accélération d'un point M s'écrit

$$\overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \overrightarrow{a}_e(M) + \overrightarrow{a}_c(M)$$

avec

- l'accélération d'entrainement

$$\boxed{\overrightarrow{a}_e(M) = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}\right) = -\omega^2\overrightarrow{HM}}$$

  où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation ;

- l'accélération de Coriolis

$$\boxed{\overrightarrow{a}_c(M) = 2\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{v}(M)_{\mathcal{R}'}}$$

Remarque : L'accélération d'entrainement est centripète (vers le centre de la rotation). L'expression $\overrightarrow{a}_e(M) = -\omega^2\overrightarrow{HM}$ est plus pratique à manipuler et contient le sens physique.
Remarque : On fera attention que dans l'accélération de Coriolis, c'est la vitesse relative du point M qui intervient. Ainsi si M est immobile dans le référentiel tournant $\mathcal{R}'$, alors l'accélération de Coriolis est nulle.

Demonstration ✍

1. Établir l'expression de $\overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}}$.
2. Établir la forme simplifier de l'accélération d'entrainement. Faire le lien avec l'accélération du point coïncident.

Application n°6 : Enfant sur un manège (bis) ✍

On reprend l'application précédente, mais cette fois l'enfant va de G à A avec une accélération constante $\overrightarrow{a}_0 = a_0\overrightarrow{e}_{x'}$ par rapport au manège. On prendra une vitesse initiale nulle.

1. Exprimer l'accélération de l'enfant par rapport au sol.

II.4 Cas général (HP)

Définition n°17 $\mathcal{R}'$ en rotation uniforme par rapport à un axe glissant

Soit $\mathcal{R}'(O'x'y'z)$ en rotation de vecteur $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{\text{cste}}$ par rapport à un axe $(O'z)$ glissant dans le référentiel $R(Oxyz)$.
Les lois de composition des vitesses et des accélérations s'écrivent :

$$\overrightarrow{v}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{v}(M)_{\mathcal{R}'} + \underbrace{\overrightarrow{v}(O')_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}}_{\overrightarrow{v}_e(M)}$$

$$\overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{a}(M)_{\mathcal{R}'} + \underbrace{\overrightarrow{a}(O')_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}_{\overrightarrow{a}_e(M)} + \underbrace{2\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{v}(M)_{\mathcal{R}'}}_{\overrightarrow{a}_c(M)}$$

III Dynamique en référentiel non galiléen

III.1 Forces d'inertie

Définition n°18 Forces d'inertie

Soit un point matériel M de masse m étudié dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$. On note $\mathcal{R}$ le référentiel absolu supposé galiléen.
La seconde loi de Newton appliquée au point matériel soumis à la résultante des forces $\vec{F}$ s'écrit

$$\boxed{m\vec{a}(M)_{\mathcal{R}'} = \vec{F} \underbrace{-m\vec{a}_e(M)}_{\vec{F}_{ie}(M)} \underbrace{-m\vec{a}_c(M)}_{\vec{F}_{ic}(M)}}$$

avec

- la force d'inertie d'entrainement $\vec{F}_{ie}(M) = -m\vec{a}_e(M)$
- la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}(M) = -m\vec{a}_c(M)$

Remarque : On parle de « vraies » forces pour $\vec{F}$ et de pseudo-forces pour les forces d'inertie $\vec{F}_{ie}$ et $\vec{F}_{ic}$.

Demonstration ✍

1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen.
2. Établir l'énoncé de la seconde loi de Newton dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$.
3. Que dire si $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$?

Application n°7 : Forces d'inertie ✍

1. Une voiture sur une route rectiligne roule à vitesse constante puis freine brusquement. Quelle est la force d'inertie qui s'applique sur les occupants de la voiture ? Faire l'AN si la voiture passe de $v = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ à l'arrêt en $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$.
2. Un manège est en rotation à la vitesse angulaire ω constante autour de (Oz). Dans le référentiel du manège, quelle force d'inertie s'exerce sur une personne immobile sur le manège à la distance $d = 5\,\mathrm{m}$ de l'axe (Oz) ? A quelle vitesse angulaire ω cette force a-t-elle-même norme que le poids de la personne ?

III.2 Seconde loi de Newton dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

Définition n°19 Seconde loi de Newton dans $\mathcal{R}'$ d'un système fermé

Soit un système quelconque S de masse m constante et de centre de masse G. D'après la seconde loi de Newton dans un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen :

$$\boxed{m\vec{a}(G)_{\mathcal{R}'} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{ie}(G) + \vec{F}_{ic}(G) \quad \text{avec} \quad \vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(G) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(G)}$$

$\vec{F}_{\text{ext}}$ correspondent aux « vraies » forces extérieures s'appliquant sur le système.

Remarque : On notera que pour un système quelconque, il faut considérer les forces d'inertie appliquées en G. Dans le cas où $\mathcal{R}'$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen, les forces d'inertie ne dépendent pas du point M. Donc cette remarque est importante quand $\mathcal{R}'$ est en rotation par rapport à $\mathcal{R}$.
Remarque : On rappelle que tout référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen est lui-même galiléen.

Application n°8 : Chute d'une balle dans un train ✍

On considère un train ayant une accélération constante par rapport au sol notée $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$, avec $a_0 > 0$.
Un enfant immobile dans le train lâche une balle de masse m, sans vitesse initiale, depuis une hauteur H du sol du wagon.
Le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ est le référentiel lié au sol avec l'axe Oz l'axe vertical ascendant.
Le référentiel $\mathcal{R}'(O'xyz)$ est le référentiel lié au train, avec O' la position de l'enfant dans le train.
On note x' et z' les coordonnées de la balle dans le repère $(O'xyz)$.

1. Établir les équations horaires $x'(t)$ et $z'(t)$.
2. Quelle est la nature de la trajectoire dans $\mathcal{R}'$?

III.3 Théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

Définition n°20 TMC d'un point matériel dans $\mathcal{R}'$

Soit un point matériel M de masse m et O **un point fixe dans** $\mathcal{R}'$ non galiléen. D'après le théorème du moment cinétique :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \vec{M}_{O,ext} + \vec{M}_O(\vec{F}_{ie}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{ic})} \quad \text{avec}$$

- le moment cinétique de M par rapport à O : $\vec{L}_O(M)_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{\mathcal{R}'}$;
- le moment de la force d'inertie d'entrainement : $\vec{M}_O(\vec{F}_{ie}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ie}(M)$;
- le moment de la force d'inertie de Coriolis : $\vec{M}_O(\vec{F}_{ic}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ic}(M)$;
- le moment des « vraies » forces extérieures : $\vec{M}_{O,ext} = \sum_i \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{i,ext}(M)\right)$.

On peut énoncer le théorème du moment cinétique scalaire par rapport à un **axe** Δ **fixe dans** $\mathcal{R}'$ non galiléen :

$$\left(\frac{\mathrm{d}L_\Delta(M)_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = M_{\Delta,ext} + M_\Delta(\vec{F}_{ie}) + M_\Delta(\vec{F}_{ic}) \quad \text{avec} \quad L_\Delta(M)_{\mathcal{R}'} = \vec{L}_{O\in\Delta}(M)_{\mathcal{R}'} \cdot \vec{u}_\Delta,$$

et de même pour le moment scalaire des forces correspondant à la projection du moment par rapport à $O \in \Delta$ selon $\vec{u}_\Delta$.

Remarque : Cet énoncé reste valable pour un solide en translation dans $\mathcal{R}'$ non galiléen en remplaçant M par G le centre de masse du solide.

Demonstration ✍

1. Établir le TMC appliqué à un point matériel dans $\mathcal{R}'$ non galiléen en O fixe dans $\mathcal{R}'$.

Complément : Cas d'un solide (HP)

Soit un solide indéformable S de centre de masse G et de masse m. Rappelons l'expression du moment cinétique :

- d'un solide en translation dans $\mathcal{R}$ quelconque : $\overrightarrow{L}_O(S)_\mathcal{R} = \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{v}(G)_\mathcal{R}$;
- d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz) dans $\mathcal{R}$ à la vitesse angulaire ω : $L_\Delta(S) = J_\Delta \omega$ avec le moment d'inertie J_Δ du solide par rapport à l'axe Δ : $J_\Delta = \iiint_{M\in S} r^2 \mathrm{d}m$, où r est la distance du point M à l'axe Δ.

Dans le cas général, le moment cinétique d'un solide par rapport à O est donné par le **théorème de Kœnig** :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_O(S)_\mathcal{R} = \overrightarrow{L}^*(S) + \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{v}(G)_\mathcal{R}}$$

avec $\overrightarrow{L}^*(S)$ le moment cinétique dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ (référentiel d'origine G et en translation par rapport à $\mathcal{R}$). Si on décompose S en points matériels M_i de masse m_i alors :

$$\overrightarrow{L}^*(S) = \sum_i \overrightarrow{GM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v}(M_i)_{\mathcal{R}*} \quad \text{avec} \quad \boxed{\overrightarrow{L}_G(S)_\mathcal{R} = \overrightarrow{L}^*(S)}$$

On peut montrer qu'il est possible d'écrire le théorème du moment cinétique dans $\mathcal{R}$ galiléen, **même si G n'est pas fixe** :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_G(S)_\mathcal{R}}{\mathrm{d}t}\right)_\mathcal{R} = \overrightarrow{M}_{G,ext} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}^*(S)}{\mathrm{d}t}\right)_\mathcal{R} = \overrightarrow{M}_{G,ext}}$$

III.4 Théorèmes énergétiques dans $\mathcal{R}'$ non galiléen

Définition n°21 Théorèmes énergétiques du point matériel

Soit un point matériel M de masse m étudié dans un référentiel non galiléen $\mathcal{R}'$. Il est soumis à un ensemble de forces extérieures

$$\sum_i \overrightarrow{F}_{i,ext} = \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \overrightarrow{F}_{c,ext} + \overrightarrow{F}_{nc,ext}$$

se décomposant

- en forces conservatives $\overrightarrow{F}_{c,ext}$ telles que $\overrightarrow{F}_{c,ext} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$;
- en forces non-conservatives $\overrightarrow{F}_{nc,ext}$ de travail $\delta W(\overrightarrow{F}_{nc,ext})_{\mathcal{R}'}$ calculé dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

D'après le théorème de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_c(M)_{\mathcal{R}'} &= \sum_i \delta W(\overrightarrow{F}_{i,ext})_{\mathcal{R}'} + \delta W(\overrightarrow{F}_{ie})_{\mathcal{R}'} \\ &= \underbrace{\delta W(\overrightarrow{F}_{c,ext})_{\mathcal{R}'}}_{-\mathrm{d}E_p} + \delta W(\overrightarrow{F}_{nc,ext})_{\mathcal{R}'} + \delta W(\overrightarrow{F}_{ie})_{\mathcal{R}'}\end{aligned}$$

Il en découle le théorème de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\mathrm{d}E_m(M)_{\mathcal{R}'} = \delta W(\overrightarrow{F}_{c,ext})_{\mathcal{R}'} + \delta W(\overrightarrow{F}_{ie})_{\mathcal{R}'}}$$

avec

$$E_m(M)_{\mathcal{R}'} = E_c(M)_{\mathcal{R}'} + E_p(M) \quad \text{et} \quad E_c(M)_{\mathcal{R}'} = \frac{1}{2}mv^2(M)_{\mathcal{R}'}$$

Remarque : On notera que l'énergie potentielle d'une force conservative est indépendante du référentiel. C'est une propriété d'une force conservative que d'avoir son travail indépendant de la trajectoire entre deux points de l'espace.
Remarque : Ces théorèmes sont aussi valables pour un solide en translation en changeant M en G.
Remarque : On peut aussi énoncer les formes intégrées

$$\boxed{\Delta E_c(M)_{\mathcal{R}'} = \sum_i W(\overrightarrow{F}_{i,ext})_{\mathcal{R}'} + W(\overrightarrow{F}_{ie})_{\mathcal{R}'} \quad \text{et} \quad \Delta E_m(M)_{\mathcal{R}'} = \sum_i W(\overrightarrow{F}_{i,nc}) + W(\overrightarrow{F}_{ie})}$$

Remarque : On peut aussi énoncer les théorèmes de la puissance cinétique et de la puissance mécanique pour établir l'équation différentielle du mouvement :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}E_c(M)_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \sum_i P(\overrightarrow{F}_{i,ext})_{\mathcal{R}'} + P(\overrightarrow{F}_{ie})_{\mathcal{R}'} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\mathrm{d}E_m(M)_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \sum_i P(\overrightarrow{F}_{i,nc})_{\mathcal{R}'} + P(\overrightarrow{F}_{ie})_{\mathcal{R}'}}$$

Demonstration ✍

1. Établir le théorème de la puissance cinétique du point matériel dans un référentiel $\mathcal{R}'$ non galiléen.

Complément : Énergie d'un solide

Soit un solide S de masse m et de centre de masse G. On donne les expressions de son énergie cinétique dans un référentiel $\mathcal{R}$ quelconque selon son mouvement :

- solide en translation dans $\mathcal{R}$: $E_c(S)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}mv^2(G)_{\mathcal{R}}$;
- solide en rotation autour d'un axe Δ fixe dans $\mathcal{R}$: $E_c(S)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$;
- cas général (HP) : $E_c(S)_{\mathcal{R}} = E_c^*(S) + \frac{1}{2}mv^2(G)_{\mathcal{R}}$, avec $E_c^*(S)$ l'énergie cinétique du solide dans son référentiel barycentrique
$$E_c^*(S) = \sum_i \left(\frac{1}{2}m_i v^2(M_i)_{\mathcal{R}*}\right)$$

Pour un solide quelconque, le théorème de la puissance cinétique

$$\left(\frac{\mathrm{d}E_c(S)_{\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \sum_i P(\overrightarrow{F}_{i,ext})_{\mathcal{R}'} + \sum_i P(\overrightarrow{F}_{i,int})_{\mathcal{R}'} + P(\overrightarrow{F}_{ie})_{\mathcal{R}'}$$

Il ne faut pas oublier de prendre en compte les forces intérieures.

Définition n°22 Énergie potentielle d'entrainement

Dans certains cas de mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$, on peut associer à la force d'inertie d'entrainement une énergie potentielle.

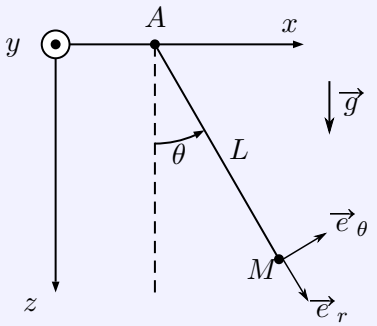
- Cas où $\mathcal{R}'$ est en **translation rectiligne uniformément accélérée** $\overrightarrow{a}(O)_{\mathcal{R}} = a_0\overrightarrow{e}_x$:
$$\boxed{\overrightarrow{F}_{ie}(M) = -ma_0\overrightarrow{e}_x \quad \text{et} \quad E_{p,ie}(M) = ma_0x + \text{cste}}$$
- Cas où $\mathcal{R}'$ est en **rotation uniforme autour de l'axe** (Oz) **fixe** dans $\mathcal{R}$:
$$\boxed{\overrightarrow{F}_{ie}(M) = -m\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{OM}\right) = m\omega^2 r\overrightarrow{e}_r \quad \text{et} \quad E_{p,ie}(M) = -\frac{1}{2}m\omega^2r^2 + \text{cste}}$$

Demonstration ✍

1. Démontrer ces deux expressions.

Application n°9 : Pendule paramétrique ✍

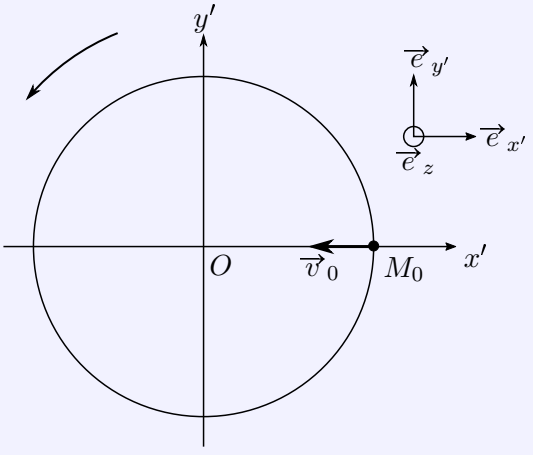
On fabrique un pendule simple en accrochant un point matériel M de masse m à un fil sans masse de longueur L que l'on attache à un anneau A coulissant le long de l'axe horizontal (Ox). On donne au point A un mouvement oscillant par rapport au référentiel terrestre $R_g(Oxyz)$ supposé galiléen : $\overrightarrow{OA} = x_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$. L'angle entre le fil et la verticale (Az) est repéré par l'angle $\theta(t)$. On se place dans le référentiel $R(Axyz)$.



1. Quel est le mouvement de $\mathcal{R}$ par rapport à R_g ? Quel est celui de la masse m dans $\mathcal{R}$?
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ par application du théorème du moment cinétique à M par rapport à l'axe (Ay) dans $\mathcal{R}$.

Application n°10 : Palet sur un plateau ✍

On considère un palet assimilable au point matériel M de masse m posé sur un plateau horizontal circulaire de centre O en rotation autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω. À $t = 0$ on pose le palet à la périphérie du plateau avec une vitesse $\vec{v}_0 = -v_0\vec{e}'_x$. On étudie le palet dans le référentiel $\mathcal{R}'(Ox'y'z)$ lié au plateau. On néglige les frottements solides.



1. Représenter les forces d'inertie à $t = 0$. Tracer qualitativement la trajectoire et représenter ces forces en un autre point de la trajectoire.
2. Établir les équations différentielles du mouvement vérifiées par x' et y'.

IV Exemples de manifestation du caractère non galiléen des référentiels terrestre et géocentrique

IV.1 Définition des référentiels

Définition n°23 Référentiel de Copernic $\mathcal{R}_c$

Son centre est le **barycentre du système solaire** et ses axes pointent vers **trois étoiles suffisamment éloignées** pour être considérées fixes. C'est le référentiel naturel pour l'étude du mouvement des planètes. Il est alors considéré comme galiléen. Mais on pourrait prendre en compte le mouvement du centre de masse du système solaire par rapport au centre de masse de notre galaxie (la voie lactée), ce qui lui ferait perdre son caractère galiléen.

Définition n°24 Référentiel de géocentrique $\mathcal{R}_G$

Son centre est le **centre de la Terre** et ses axes sont les **mêmes que ceux du référentiel de Copernic**. Il est donc en translation elliptique (quasi-circulaire) par rapport au référentiel de Copernic. Son centre tourne autour du soleil en un an.
Ce référentiel est en bonne approximation galiléen pour des expériences de durée faible devant un an.

Définition n°25 Référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$

C'est le référentiel **lié à la Terre**. Il est donc **en rotation par rapport au référentiel géocentrique**. Sa vitesse angulaire de rotation est

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

C'est celui qu'on appelle référentiel du laboratoire.
Ce référentiel est en bonne approximation galiléen pour des expériences de durée faible devant un jour.

Dans la suite, nous allons donner des exemples de phénomènes montrant le caractère non galiléen du référentiel géocentrique ou terrestre.

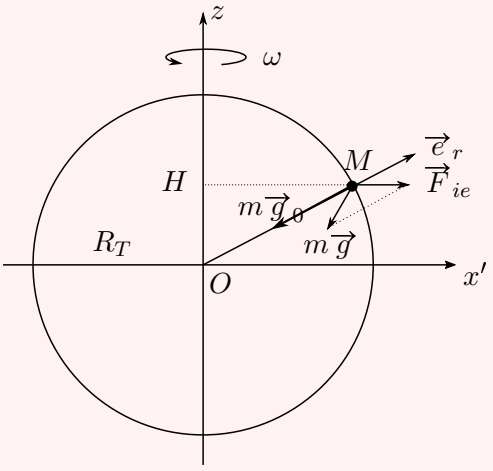
IV.2 Conséquences de la rotation propre de la Terre

a) Définition du poids

Définition n°26 Le poids

Le poids d'un corps M de masse m correspond à la somme de la force gravitationnelle de la masse M_T de la Terre à la surface de la Terre et de la force d'inertie d'entrainement $\overrightarrow{F}_{ie}(M)$ liée au mouvement de rotation du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique :

$$\overrightarrow{P}(M) = \underbrace{-m\frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2}\overrightarrow{e}_r}_{m\overrightarrow{g}_0} + m\omega^2\overrightarrow{HM} = m\overrightarrow{g}$$



Application n°11 : Fil à plomb ✍

On étudie une masse m accrochée à un fil de longueur L dont l'autre extrémité A est fixe dans le référentiel terrestre. On considère le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ comme non galiléen et le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ comme galiléen. On note $\overrightarrow{T}$ la tension du fil exercée sur la masse et on définit la poids de la masse $\overrightarrow{P}(M)$ comme la force s'opposant à $\overrightarrow{T}$ à l'équilibre dans $\mathcal{R}_T$.

1. Établir l'expression de $\overrightarrow{P}(M)$. En déduire l'expression de l'accélération de pesanteur $\overrightarrow{g}(M)$.
2. Calculer la norme des deux termes apparaissant dans l'expression de $\overrightarrow{g}$. On donne la constante gravitationnelle $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{SI}$, la masse de la Terre $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$, le rayon terrestre $R_T = 6400\,\text{km}$. Commenter.
3. On repère le point M à la surface de la Terre par sa latitude λ. Commenter l'évolution de $\overrightarrow{g}(M)$ en fonction de λ. À titre d'exemple, on donne g
   - à l'équateur $g = 9{,}78\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$
   - au pôle $g = 9{,}83\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$
   - à Paris $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$

b) Effets de la force de Coriolis

La force de Coriolis $\overrightarrow{F}_{ic}(M) = -2m\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_T/R_G) \wedge \overrightarrow{v}(M)_{\mathcal{R}_T}$ dépend de la vitesse relative et de la masse du corps. On peut se poser la question suivante : est-ce qu'on va être sensible à cette force pour une particule M de masse m dans le champ de pesanteur terrestre ?

Faisons un ordre de grandeur entre la force d'inertie de Coriolis et le poids :

$$\frac{F_{ic}}{P} = \frac{2\omega v(M)_{R_T}}{g}$$

Prenons une balle allant à une vitesse $v(M)_{R_T} \approx 200\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$, alors

$$\frac{F_{ic}}{P} \approx \frac{400/3,6 \times 7{,}3 \times 10^{-5}}{10} \approx 8 \times 10^{-4}$$

On constate que cette force est négligeable.
Néanmoins il est possible d'observer son effet comme

- la déviation vers l'est d'un corps en chute libre dans l'hémisphère nord ;
- la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault (video https ://www.youtube.com/watch ?v=YhXLxc1hzxM
- le sens de rotation des systèmes dépressionnaires dans les hémisphères nord et sud.

Application n°12 : Sens des dépressions ✍

Voici une image d'une dépression atmosphérique :



1. Cette image satellite a-t-elle été prise dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud ? Pour justifier, on représentera la vitesse du vent liée uniquement à la dépression, puis la force de Coriolis.

IV.3 Conséquences de la translation elliptique de la Terre : force de marées

Application n°13 : Force de marées ✍

On étudie une masse m à la surface de la Terre dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ non galiléen. Ce corps est soumis au champ gravitationnel terrestre, à celui du soleil et d'autres forces $\vec{F}$.

1. Appliquer la seconde loi de Newton dans $\mathcal{R}_G$.
2. Par application de la seconde loi de Newton à la Terre de centre O dans le référentiel de Copernic, exprimer $\vec{a}(O)_{R_C}$.
3. On définit la force de marées liée au Soleil comme la somme de la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur le point matériel M et de la force d'inertie d'entrainement. Exprimer $\vec{F}_{\text{marée}}$.
4. Le raisonnement mené est le même en considérant comme corps attracteur la lune et non le soleil. Représenter cette force en différents points de la Terre, notamment au niveau de l'équateur. Commenter.