

Test de rentrée - 2h

Exercice 1 (*)

Soit n entier. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$

Corrigé : Avec la relation $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} = n 2^{n-1}$$

Exercice 2 (**)

Soit n entier. Calculer $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i)$

Corrigé : On a

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) = \sum_{j=2}^n \frac{j(j-1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (j^2 + j) = \frac{n(n-1)}{4} \left(\frac{2n-1}{3} + 1 \right)$$

Ainsi

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) = \frac{n(n^2-1)}{6}$$

Exercice 3 (***)

Soit n entier. Calculer $\sum_{k=0}^n k 2^k$

Corrigé : Pour n entier, on note $S_n = \sum_{k=0}^n k 2^k$. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n k 2^k = \sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} 2^k = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=\ell}^n 2^k = \sum_{\ell=1}^n [2^{n+1} - 2^\ell] = n 2^{n+1} - 2^{n+1} + 2$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Variante : Soit n entier. Un changement d'indice donne

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) 2^{k+1} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) 2^k = 2(S_n - n 2^n) + 2(2^n - 1)$$

On retrouve alors le résultat précédent.

Exercice 4 (*)

Soit x réel et n entier. Linéariser $\cos(x)^n$ consiste à déterminer une expression en fonction des $\cos(kx)$ avec les k entiers.

1. Linéariser $\cos(x)^2$.
2. Linéariser $\cos(x)^3$.

Corrigé : 1. On a

$$\cos(x)^2 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

2. On a

$$\cos(x)^3 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$$

Exercice 5 (**)

Soit n entier et x réel. Déterminer une expression simple de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

Corrigé : On a
$$S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right)$$

La somme $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$ est géométrique de raison e^{ix} . On suppose $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (raison égale à 1 sinon).

Avec une factorisation d'angle moitié, il vient

$$S_n = \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} - 2i \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{e^{i\frac{x}{2}} - 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \begin{cases} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 6 (*)

Calculer
$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$$

Corrigé : Avec le changement de variables $t = \sin(u)$ de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 7 (*)

Calculer $\int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arcsin}(t) \, dt$

Corrigé : Par intégration par parties, on trouve

$$\int^x \text{Arcsin}(t) \, dt = [t \text{Arcsin}(t)]^x - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, dt = x \text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \text{Arcsin}(t) \, dt = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

Exercice 8 (*)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$

Corrigé : Pour n entier non nul, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

On reconnaît une somme de Riemann pour la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ continue sur $[0; 1]$ et ainsi

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 9 (**)

On pose $\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad f_n(t) = n^2 t^n (1-t)$

A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) \, dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \, dt$?

Corrigé : On a $f_n(1) = 0$ pour tout n entier et par croissances comparées

$$\forall t \in [0; 1[\quad f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Pour n entier, il vient

$$\int_0^1 n^2 t^n (1-t) \, dt = n^2 \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) \, dt \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \, dt$$

Exercice 10 (**)

Soit t réel. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n$

Corrigé : Une écriture exponentielle-logarithme permet de lever la forme indéterminée :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n &= \exp \left(n \ln \operatorname{ch} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) = \exp \left(n \ln \left(1 + \frac{t^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(n \left(\frac{t^2}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right) = \exp \left(\frac{t^2}{2} + o(1) \right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\frac{t^2}{2}}}$$

Exercice 11 (*)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = 1$

Corrigé : On résout l'équation homogène puis on observe que sh est une solution particulière évidente et on conclut que l'ensemble des solutions est la droite affine

$$\boxed{\{x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sh}(x) + \lambda \operatorname{ch}(x), \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice 12 (***)

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(X-a)(X-b)$ avec a, b réels. On distinguera selon que $a = b$ ou $a \neq b$.

Corrigé : D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^n = (X-a)(X-b)Q + R \tag{*}$$

avec $\deg R < 2$, autrement dit $R = \alpha X + \beta$ avec α, β réels.

Supposons $a \neq b$. En substituant X par a puis par b dans (*), on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ b^n = \alpha b + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{a^n - b^n}{a - b} \\ \beta = \frac{ab^n - ba^n}{a - b} \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Si } a \neq b, \text{ on a } R = \frac{1}{a-b} ((a^n - b^n)X + ab^n - ba^n)}$$

Supposons $a = b$. Notant $S = (X-a)^2Q$, on observe que S admet a pour racine double d'où $S(a) = S'(a) = 0$. En substituant X par a dans (*) puis dans la relation obtenue par dérivation de (*), on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ na^{n-1} = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = na^{n-1} \\ \beta = (1-n)a^n \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Si } a = b, \text{ on a } R = na^{n-1}X + (1-n)a^n}$$

Variante : Avec la formule de Taylor, on a

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k = R + (X-a)^2 Q \quad \text{et} \quad R = P(a) + P'(a)(X-a)$$

ou aussi
$$X^n = (X-a+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X-a)^{n-k} a^k$$

Exercice 13 (*)

Soit n entier et $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts.

1. Déterminer une expression des polynômes $L_0, \dots, L_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

2. Justifier que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé : 1. Il s'agit des polynômes interpolateurs de Lagrange :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad L_i = \prod_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}} \left(\frac{X - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

2. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ des réels tels que $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i = 0$. En substituant X par x_j avec $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, il vient

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i(x_j) = 0 \iff \sum_{i=0}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j = 0$$

Ceci vaut pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ d'où la liberté de la famille $(L_0, \dots, L_n)$. Par ailleurs, c'est une famille de $n+1$ vecteurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ espace de dimension $n+1$. On conclut

$$\boxed{\text{La famille } (L_0, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Exercice 14 (**)

Soient n, m entiers, $x_0, \dots, x_m$ des réels distincts, $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_m))$.

1. Justifier que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{m+1})$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit bijective.

Corrigé : 1. Sans difficulté, on a

$$\forall (P, Q, \lambda) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \times \mathbb{R} \quad \Phi(\lambda P + Q) = \lambda \Phi(P) + \Phi(Q)$$

D'où

$$\boxed{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^m)}$$

2. Si Φ est bijective, alors c'est un isomorphisme entre deux espaces vectoriels qui sont donc de même dimension d'où $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{m+1}$ ce qui équivaut à $m+1 = n+1$. Réciproquement, supposons $m = n$, on a

$$P \in \text{Ker } \Phi \iff \forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad P(x_i) = 0$$

Ainsi, on a $\deg P \leq n$ et P admet $n+1$ racines distinctes d'où $P = 0$ autrement dit $\text{Ker } \Phi = \{0\}$. Comme Φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension, c'est une bijection et on conclut

$$\boxed{\Phi \text{ bijective si et seulement si } n = m}$$

Exercice 15 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Comparer $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } f^2$.
2. Montrer $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$

Corrigé : 1. Soit $x \in \text{Ker } f$. On a

$$f(x) = 0_E \implies f^2(x) = f(0_E) = 0_E$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2}$$

Remarque : L'inclusion réciproque est fautive en général comme on peut le voir avec $f(x, y) = (0, x)$ pour $(x, y) \in \mathbb{K}^2$. On a $f^2 = 0$ d'où $\text{Ker } f^2 = \mathbb{K}^2$ mais $\text{Ker } f = \text{Vect}(0, 1)$.

2. Supposons $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. Il existe $t \in E$ tel que $x = f(t)$ et $f(x) = f^2(t) = 0_E$. Ainsi, on a $t \in \text{Ker } f^2$ d'où $t \in \text{Ker } f$ ce qui prouve $x = 0_E$. Réciproquement, supposons $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$. Soit $x \in \text{Ker } f^2$. On a donc $f(x) \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$ d'où $f(x) = 0_E$.

On conclut

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Ker } f^2 \iff \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_E\}}$$

Exercice 16 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

1. Déterminer le ou les projecteurs injectifs.
2. Déterminer le ou les projecteurs surjectifs.

Corrigé : Soit p un projecteur. On a $p(x) = p(p(x))$ pour tout $x \in E$. Si p est injectif, il s'ensuit $p(x) = x$ pour tout $x \in E$. Si p est surjectif, alors pour $x \in E$, on dispose de $t \in E$ tel que $x = p(t)$ d'où $p(x) = p^2(t) = p(t) = x$. On conclut

$$\boxed{\text{L'unique projecteur injectif ou surjectif est l'identité.}}$$

Exercice 17 (*)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle, ε un réel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Comparer les événements $\{X \geq \varepsilon\}$ et $\{f(X) \geq f(\varepsilon)\}$ si f est croissante.
2. En déduire $\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \mathbb{E}(e^{tX})$

Corrigé : 1. Par croissance de f , on a l'inclusion

$$\boxed{\{X \geq \varepsilon\} \subset \{f(X) \geq f(\varepsilon)\}}$$

2. Soit $t \geq 0$. D'après ce qui précède appliqué à la fonction $x \mapsto e^{tx}$, on a

$$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{t\varepsilon})$$

La variable aléatoire e^{tX} est positive et d'après l'inégalité de Markov, on conclut

$$\boxed{\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \mathbb{E}(e^{tX})}$$

Exercice 18 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(1/2)$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{2n}{3}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Corrigé : On a $\left\{S_n \geq \frac{2n}{3}\right\} = \left\{S_n - \frac{n}{2} \geq \frac{n}{6}\right\} \subset \left\{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{6}\right\}$

D'où $\mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{2n}{3}\right) \leq \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{6}\right)$

D'après la loi faible des grands nombres, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{6}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Par comparaison

$$\boxed{\mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{2n}{3}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

Exercice 19 (*)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta$$

Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Corrigé : Pour $(P, Q) \in E$, l'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment, l'intégrande $\theta \mapsto P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))$ étant continue sur $[0; \pi]$. La forme est clairement symétrique, linéaire en la première variable par linéarité du produit à gauche et linéarité de l'intégrale. Pour $P \in E$, on a

$$\langle P, P \rangle = \int_0^\pi P^2(\cos(\theta)) d\theta \geq 0$$

par positivité de l'intégrale. Enfin, si $\langle P, P \rangle = 0$, l'intégrande $\theta \mapsto P^2(\cos(\theta))$ étant continue positif sur $[0; \pi]$, il vient

$$\forall \theta \in [0; \pi] \quad P^2(\cos(\theta)) = 0$$

d'où $\forall \theta \in [0; \pi] \quad P(\cos(\theta)) = 0$

Or, la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ réalise une surjection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$ d'où

$$\forall t \in [-1; 1] \quad P(t) = 0$$

Ainsi, le polynôme P admet une infinité de racines ce qui prouve qu'il s'agit du polynôme nul.

On conclut $\boxed{\text{L'application } (P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q \rangle \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

Exercice 20 (**)

Soit n entier ≥ 2 . Établir
$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

Corrigé : Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, $x = (\sqrt{1}, \dots, \sqrt{n})$ et $y = (1, \dots, 1)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \|x\| \|y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n k} \times \sqrt{\sum_{k=1}^n 1} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \times \sqrt{n} = n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

L'inégalité est une égalité si et seulement si (x, y) est liée ce qui n'est clairement pas le cas. On conclut

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad \sum_{k=1}^n \sqrt{k} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}}$$