

Test de rentrée - 2h

Les résultats doivent être encadrés.

Exercice 1 (*)

Soit n entier. Calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

Exercice 2 (**)

Soit n entier. Calculer

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$$

Exercice 3 (***)

Soit n entier. Calculer

$$\sum_{k=0}^n k 2^k$$

Exercice 4 (*)

Soit x réel et n entier. Linéariser $\cos(x)^n$ consiste à déterminer une expression en fonction des $\cos(kx)$ avec les k entiers.

1. Linéariser $\cos(x)^2$.
2. Linéariser $\cos(x)^3$.

Exercice 5 (**)

Soit n entier et x réel. Déterminer une expression simple de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$.

Exercice 6 (*)

Calculer

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \, dt$$

Exercice 7 (*)

Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin}(t) \, dt$$

Exercice 8 (*)

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + n^2}$$

Exercice 9 (**)

On pose $\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times [0; 1] \quad f_n(t) = n^2 t^n (1 - t)$

A-t-on $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$?

Exercice 10 (**)

Soit t réel. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{ch} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n$

Exercice 11 (*)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\operatorname{ch}(x)y' - \operatorname{sh}(x)y = 1$

Exercice 12 (***)

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(X - a)(X - b)$ avec a, b réels. On distinguera selon que $a = b$ ou $a \neq b$.

Exercice 13 (*)

Soit n entier et $x_0, \dots, x_n$ des réels distincts.

1. Déterminer une expression des polynômes $L_0, \dots, L_n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

2. Justifier que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 14 (**)

Soient n, m entiers, $x_0, \dots, x_m$ des réels distincts, $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_m))$.

1. Justifier que $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{m+1})$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que Φ soit bijective.

Exercice 15 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Comparer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f^2$.
2. Montrer $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$

Exercice 16 (**)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev.

1. Déterminer le ou les projecteurs injectifs.
2. Déterminer le ou les projecteurs surjectifs.

Exercice 17 (*)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle, ε un réel et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Comparer les événements $\{X \geq \varepsilon\}$ et $\{f(X) \geq f(\varepsilon)\}$ si f est croissante.

2. En déduire $\forall t \geq 0 \quad \mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq e^{-t\varepsilon} \mathbb{E}(e^{tX})$

Exercice 18 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(1/2)$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq \frac{2n}{3}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Exercice 19 (*)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))d\theta$$

Justifier qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 20 (**)

Soit n entier ≥ 2 . Établir

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$