

TD 1 : Traitement du signal

Exercice 1: Réponses d'un filtre (★★)

1. On observe que dans chaque cas qu'un signal est la dérivée de l'autre. Le filtre passe-bande possède un caractère dérivateur à BF et intégrateur à HF. On peut retrouver cela en étudiant les cas limites de la fonction de transfert :

$$\underline{H}_{BF} \sim \frac{1}{-jQ\omega_0/\omega} = \frac{j\omega}{Q\omega_0} \propto j\omega$$

d'où le caractère dérivateur.

$$\underline{H}_{HF} \sim \frac{1}{jQ\omega/\omega_0} = \frac{\omega_0}{Q \times j\omega} \propto \frac{1}{j\omega}$$

d'où le caractère intégrateur.

On détermine les fréquences des signaux à partir des oscillogrammes :

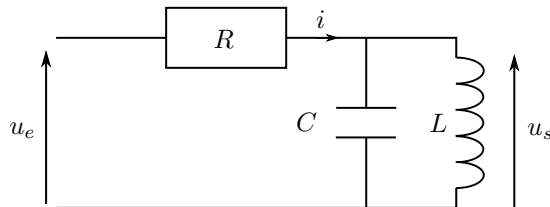
- Oscillogramme de gauche : $T_1 = 4 \text{ ms}$ et $f_1 = 250 \text{ Hz}$
- Oscillogramme de droite : $T_2 = 0,4 \mu\text{s}$ et $f_1 = 2,5 \times 10^6 \text{ Hz}$

L'oscillogramme de gauche correspond au cas limite BF ($f_1 \ll f_0$), le circuit dérive le signal d'entrée. Le signal d'entrée est donc le signal triangulaire et le signal créneau est le signal de sortie.

L'oscillogramme de droite correspond au cas limite HF ($f_2 \gg f_0$), le circuit intègre le signal d'entrée. Le signal d'entrée est donc le signal triangulaire et le signal constitué d'arcs de parabole est le signal de sortie.

Exercice 2: Le passe-bande mystère (★★)

1. Le fait que i soit non nul à BF, indique que D_2 n'est pas une résistance, car sinon $u_s \xrightarrow{BF} Ri \neq 0$.
Pour avoir un passe bande, il faut que D_2 se comporte comme un fil à BF et à HF. Il s'agit donc d'une association en parallèle d'un condensateur et d'une bobine.



La fonction de transfert harmonique s'écrit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

La pulsation de résonance correspond à la pulsation propre donc

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_r$$

La bande passante est telle que

$$\Delta f = f_0/Q = \frac{1}{2\pi RC}$$

Enfin à BF, on a la circuit équivalent à une résistance R , donc $R = U/i = 1 \text{ k}\Omega$.

On en déduit C puis L :

$$C = \frac{1}{2\pi R \Delta f} = 1,6 \mu\text{F} \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{4\pi^2 C f_0^2} = 16 \text{ mH}$$

2. Le signal de sortie sera sinusoïdal car seule l'harmonique de rang 1 se situe dans la bande passante :

$$u_s(t) = \frac{4}{\pi^2} \cos(2\pi f_t t)$$

La valeur efficace est

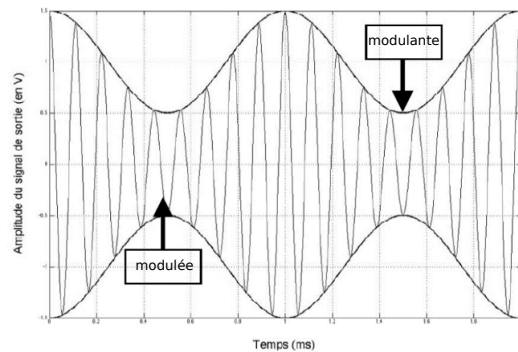
$$U_{s,eff} = \frac{4}{\pi^2 \sqrt{2}} = 0,29 \text{ V}$$

3. Pour $f_t = 100 \text{ Hz}$, les principales harmoniques (les 4 premières) se situent dans la bande atténuée BF correspondant à un caractère dérivateur. Ainsi le signal de sortie sera quasi rectangulaire et de faible amplitude.

Pour $f_t = 10 \text{ kHz}$, toutes les harmoniques se situent dans la bande atténuée HF correspondant à un caractère intégrateur. Ainsi le signal de sortie sera des portions de parabole de faible amplitude.

Exercice 3: Filtrage d'un signal modulé en amplitude (★★)

1. La porteuse a une fréquence f_p plus grande que la fréquence F du signal de l'onde modulante. Ainsi l'oscillation lente est celle de l'onde modulante. C'est l'enveloppe supérieure du signal modulé.



2. Il faut linéariser pour établir la DSF de $s(t)$. On utilise la formule $2 \cos(p) \cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q)$:

$$s(t) = S_m \cos(\omega_p t) + \frac{m S_m}{2} \cos((\omega_p + \Omega)t) + \frac{m S_m}{2} \cos((\omega_p - \Omega)t)$$

On aura 3 raies

- un pic à f_p d'amplitude S_m ;
- un pic à $f_p + F$ d'amplitude $m S_m / 2$;
- un pic à $f_p - F$ d'amplitude $m S_m / 2$.

3. La forme canonique d'un passe-bande d'ordre 2 avec $f_0 = f_p$ est :

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ \left(\frac{f}{f_p} - \frac{f_p}{f} \right)}$$

On pose $f = f_p + \delta f$ avec $|\delta f|/f_p \ll 1$, alors

$$\frac{f}{f_p} = 1 + \frac{\delta f}{f_p} \quad \text{et} \quad \frac{f_p}{f} = \left(1 + \frac{\delta f}{f_p} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{\delta f}{f_p}$$

On en déduit le DL à l'ordre 1 en $\delta f/f_p$:

$$\frac{f}{f_p} - \frac{f_p}{f} \approx 2 \frac{\delta f}{f_p}$$

On obtient l'expression donnée

$$H(f) \simeq \frac{G_0}{1 + 2jQ \frac{f - f_p}{f_p}}$$

4. On utilise le principe du filtrage harmonique :

$$s(t) = S_m \cos(\omega_p t) + \frac{m S_m}{2} \cos((\omega_p + \Omega)t) + \frac{m S_m}{2} \cos((\omega_p - \Omega)t)$$

donc

$$s'(t) = S_m G(f_p) \cos(\omega_p t) + \frac{m S_m}{2} G(f_p + F) \cos((\omega_p + \Omega)t + \phi(f_p + F)) + \frac{m S_m}{2} G(f_p - F) \cos((\omega_p - \Omega)t + \phi(f_p - F))$$

avec les gains

$$G(f_p) = G_0 \quad \text{et} \quad G(f_p + F) = G(f_p - F) = \frac{G_0}{\sqrt{1 + (2QF/f_p)^2}}$$

et les phases

$$\phi(f_p) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(f_p + F) = -\arctan(2QF/f_p) = \varphi \quad \text{et} \quad \phi(f_p - F) = -\varphi$$

On a alors

$$s'(t) = S_m G_0 \cos(\omega_p t) + \frac{m S_m}{2} G(f_p + F) \cos(\omega_p t + (\Omega t + \varphi)) + \frac{m S_m}{2} G(f_p - F) \cos(\omega_p t - (\Omega t + \varphi))$$

On en déduit

$$s'(t) = S'_m (1 + m' \cos(\Omega t + \varphi)) \cos(\omega_p t).$$

avec

$$S'_m = S_m G_0 \quad ; \quad \varphi = -\arctan(2QF/f_p) \quad \text{et} \quad m' = \frac{m}{\sqrt{1 + (2QF/f_p)^2}} < m$$

Le filtre induit donc un déphasage φ et une diminution du taux de modulation

On calcule la diminution relative de l'indice de modulation :

$$\frac{m - m'}{m} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2QF/f_p)^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (100 \times 0,005)^2}} = 0,11$$

soit une diminution relative de 11%.

Exercice 4: Étude d'un filtre en peigne de fréquence (★★)

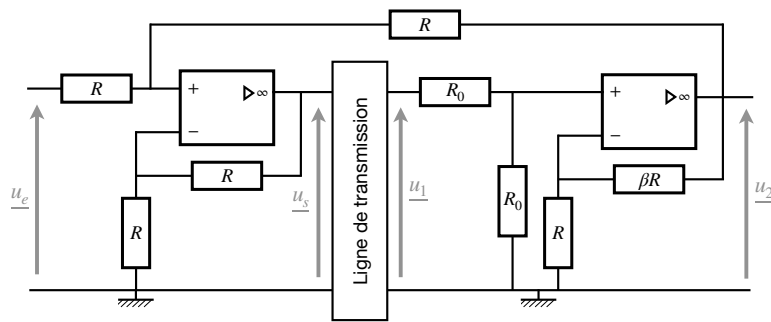


FIGURE 1 – Schéma du filtre en peigne de fréquence.

1. La fonction de transfert a un module égal à 1 et n'induit donc qu'un déphasage de $-\omega\tau$ au signal $\underline{u}_s$.

Si l'on note $\underline{u}_s = U_s e^{j\omega t}$, alors :

$$\underline{u}_1 = \underline{H}_B(j\omega) \underline{u}_s = U_s e^{j\omega(t-\tau)}$$

Tout comme lors d'une propagation de signal, le signal de sortie $\underline{u}_1$ est égal au signal d'entrée $\underline{u}_s$ mais décalé d'un retard τ (dû à la propagation dans la ligne à retard).

2. La présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse indique un possible régime linéaire.
3. Comme l'ALI est idéal, le courant i_+ en entrée de la borne non-inverseuse est nul, donc les deux résistances R_0 sont en série. En appliquant un pont diviseur de tension,

$$\text{on trouve que } \underline{V}_+ = \frac{R_0}{R_0 + R_0} \underline{u}_1 = \frac{\underline{u}_1}{2}.$$

4. Un raisonnement similaire à la question précédente permet d'obtenir :

$$\underline{V}_- = \frac{R}{R + \beta R} \underline{u}_2 = \frac{1}{1 + \beta} \underline{u}_2.$$

5. Comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, $\underline{V}_- = \underline{V}_+$, d'où :

$$\frac{1}{1 + \beta} \underline{u}_2 = \frac{\underline{u}_1}{2} \implies \underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{1 + \beta}{2} = \alpha$$

6. À l'aide d'une loi des nœuds exprimée en termes de potentiels au niveau de l'entrée non-inverseuse, on obtient :

$$\frac{u_e - V_+}{R} + \frac{u_2 - V_+}{R} = i_+ = 0 \implies 2V_+ = u_e + u_2$$

Ensuite, à l'aide d'un pont diviseur de tension (ou avec une autre loi des nœuds en terme de potentiels), on obtient au niveau de l'entrée inverseuse :

$$\underline{V}_- = \frac{R}{R + R} \underline{u}_s \implies 2V_- = \underline{u}_s$$

Ainsi, comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, $\underline{V}_- = \underline{V}_+$, d'où $\underline{u}_s = \underline{u}_e + \underline{u}_2$.

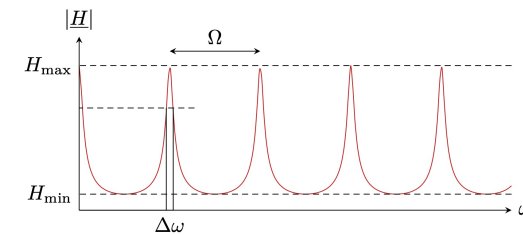
7. Sachant que $\underline{u}_1 = \underline{u}_s e^{-j\omega\tau}$ et $\underline{u}_2 = \alpha \underline{u}_1 = \alpha \underline{u}_s e^{-j\omega\tau}$, on obtient :

$$\underline{u}_e + \alpha \underline{u}_s e^{-j\omega\tau} = \underline{u}_s \implies \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega\tau}}$$

8. Comme $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - (\alpha \cos(-\omega\tau) + j\alpha \sin(-\omega\tau))} = \frac{1}{(1 - \alpha \cos(\omega\tau)) + j\alpha \sin(\omega\tau)}$, alors :

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1 - \alpha \cos(\omega\tau))^2 + (\alpha \sin(\omega\tau))^2} = \frac{1}{1 - 2\alpha \cos(\omega\tau) + \alpha^2 \cos^2(\omega\tau) + \alpha^2 \sin^2(\omega\tau)}$$

$$\text{On obtient bien alors : } |\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega\tau)}$$



9. Le maximum de $|\underline{H}(j\omega)|$ est atteint lorsque $\cos(\omega\tau) = 1$, d'où $H_{\max} = \frac{1}{1 - \alpha}$.

Le minimum est atteint pour $\cos(\omega\tau) = -1$, d'où $H_{\min} = \frac{1}{1 + \alpha}$.

On cherche Ω tel que $|\underline{H}(j(\omega + \Omega))| = |\underline{H}(j\omega)|$, soit tel que $\cos((\omega + \Omega)\tau) = \cos(\omega\tau)$.

Comme $\cos$ est 2π -périodique, on obtient $\Omega\tau = 2\pi$ soit $\Omega = \frac{2\pi}{\tau}$.

10. Il faut déterminer la pulsation de coupure telle que $|H(j\omega_c)| = H_{\max}/\sqrt{2}$, soit :

$$\frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\omega_c \tau)} = \frac{1}{2(1 - \alpha)^2}$$

En simplifiant, on obtient : $\cos(\omega_c \tau) = \frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha}$. La plus faible pulsation de coupure ω_c nous donnera la demi largeur de la bande passante (car le premier maximum de $|H(j\omega)|$ est centré en $\omega = 0$), soit

$$\omega_c = \frac{1}{\tau} \text{Arccos}\left(\frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha}\right) \Rightarrow \Delta\omega = \frac{2}{\tau} \text{Arccos}\left(\frac{4\alpha - 1 - \alpha^2}{2\alpha}\right)$$

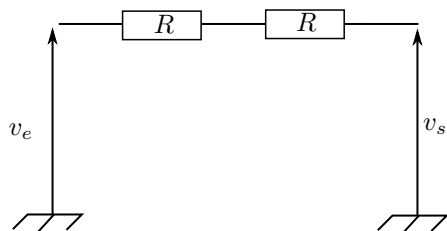
11. Compte tenu de l'allure de $|H(j\omega)|$, le filtre laisse passer toutes les pulsations multiples de Ω (soit les fréquences multiples de $\Omega/2\pi$). Comme le signal d'intérêt est périodique de période T , cela signifie que sa décomposition en série de Fourier est composée uniquement de fréquences multiples de $1/T$.

Ainsi, pour que le filtre ne transmette que les harmoniques du signal d'intérêt (et élimine le bruit), il faut que :

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \Rightarrow \tau = T$$

Exercice 5: Étude d'un filtre(***)

1. À BF les condensateurs se comportant comme des interrupteurs ouverts, le circuit revient au schéma suivant



On a alors $u_s \underset{BF}{\approx} u_e$

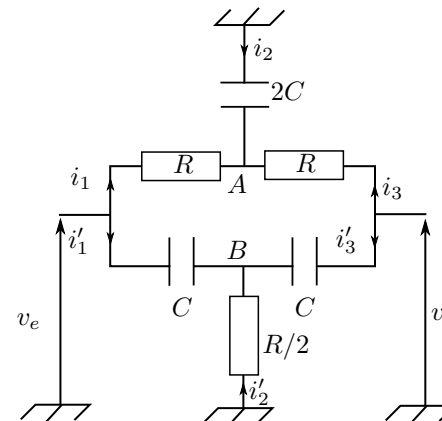
À HF les condensateurs se comportant comme des fils, on a $u_s \underset{HF}{\approx} u_e$

Il s'agit d'un réjecteur de bande.

2. On applique une loi des nœuds en terme de potentiel en A et B , et on remarque que $i'_3 = -i_3$ car il n'y a pas de courant en sortie (ce qui n'est pas le cas en entrée). Cela fera 3 équations pour 3 inconnues v_A , v_B et u_s .

$$\begin{cases} \frac{v_e - v_A}{R} + \frac{v_s - v_A}{R} - 2jC\omega v_A = 0 \\ (v_e - v_B)jC\omega + (v_s - v_B)jC\omega - \frac{2v_B}{R} = 0 \\ \frac{v_s - v_A}{R} = (v_B - v_s)jC\omega \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} 2v_A(1 + jRC\omega) = u_e + u_s \\ 2v_B(1 + jRC\omega) = (u_e + u_s)jRC\omega \\ u_s(1 + jRC\omega) = v_A + v_B jRC\omega \end{cases}$$



On note $x = RC\omega$. En faisant le rapport des deux premières équations, on a

$$\frac{v_B}{v_A} = jx \quad \text{soit} \quad v_B = jx v_A$$

La troisième équation donne alors

$$u_s(1 + jx) = v_A(1 - x^2)$$

On exprime alors v_A :

$$v_A = \frac{u_e + u_s}{2(1 + jx)} \quad \text{donc} \quad u_s(1 + jx) = \frac{u_e + u_s}{2(1 + jx)}(1 - x^2)$$

On isole u_s :

$$u_s \left(\frac{2(1+jx)^2}{1-x^2} - 1 \right) = u_e \quad \text{soit} \quad u_s \left(\frac{2+4jx-2x^2-1+x^2}{1-x^2} \right) = u_e$$

On obtient alors la fonction de transfert harmonique

$$\underline{H} = \frac{1}{\frac{1-x^2+4jx}{1-x^2}} = \frac{1}{1+\frac{4jx}{1-x^2}}$$

On obtient la forme demandée avec $Q = 1/4$.

$$3. \quad G_{dB} = -10 \log \left(1 + \frac{16x^2}{(1-x^2)^2} \right)$$

4. — $x \rightarrow 0, G_{dB} \rightarrow 0$
 — $x \rightarrow \infty, G_{dB} \rightarrow 0$
 — $x \rightarrow 1, G_{dB} \rightarrow -\infty$

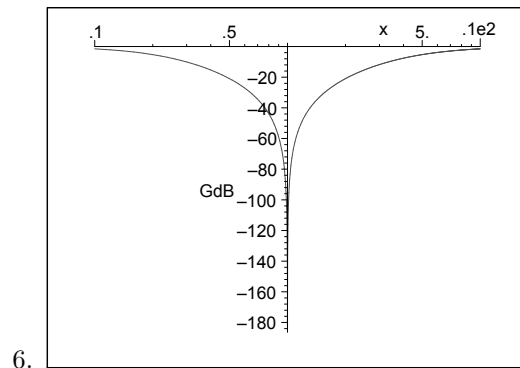
5. $H_{max} = 1$, on cherche x tel que : $\left(\frac{4x}{1-x} \right)^2 \geq 1$

La bande de réjection est $\Delta x = [x_1; x_2]$, avec x_1 et x_2 solutions de l'équation :

$$x^2 \pm 4x - 1 = 0$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{5} = 4,2 \quad \text{et} \quad x_1 = -2 + \sqrt{5} = 0,2$$

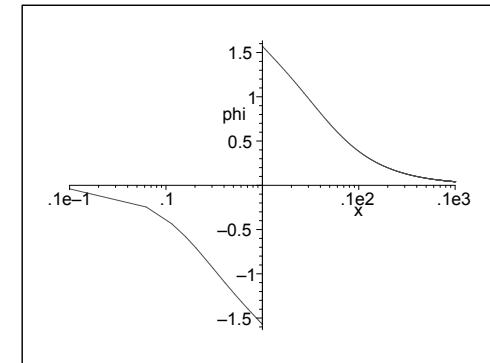
$$\Delta x = 4 = 1/Q$$



7.

$$\phi = -\arctan \left(\frac{4x}{1-x^2} \right) \quad \phi \in]-\pi/2; \pi/2[$$

- $x \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0$
 — $x \rightarrow \infty, \phi \rightarrow 0$
 — $x \rightarrow 1^-, \phi \rightarrow -\pi/2$
 — $x \rightarrow 1^+, \phi \rightarrow \pi/2$



Exercice 6: Le guidage des avions, un instrument essentiel : l'altimètre. (★★)

(Mines-Ponts PC Physique 2 2011)

1. Pour $t \in [0, t_0[$, $f_s(t) = f_0 + \frac{\delta_f}{t_0} t$

2. $\frac{d\theta}{dt} = 2\pi f_s(t) = 2\pi f_0 + 2\pi \frac{\delta_f}{t_0} t$

Par intégration, $\theta(t) = 2\pi f_0 t + 2\pi \frac{\delta_f}{2t_0} t^2 + K$, avec K une constante d'intégration.

Or à $t = 0$, $\theta(0) = 0$, donc $K = 0$. D'où $\theta(t) = 2\pi f_0 t + 2\pi \frac{\delta_f}{2t_0} t^2$.

On en déduit l'expression de $s(t)$ de l'énoncé :

$$s(t) = A \cos \left[2\pi f_0 t + 2\pi \frac{\delta_f}{2t_0} t^2 \right].$$

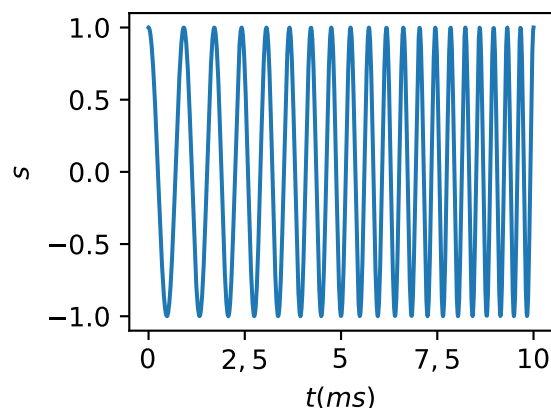
On met ce signal sous la forme $s(t) = A \cos(2\pi f(t) \times t)$:

$$s(t) = A \cos \left[2\pi f_0 t \left(1 + \frac{\delta_f}{2f_0 t_0} t \right) \right] \quad \text{soit} \quad s(t) = A \cos [2\pi f_0 t (1 + \omega_1 t)]$$

On pose alors la fréquence $f(t) = f_0 (1 + \omega_1 t)$.

L'application numérique de ω_1 donne $\omega_1 = 0,5 \text{ rad s}^{-1}$.

On trace alors un signal modulé en fréquence :



3. On trouve $\tau = 2,00 \times 10^{-5} \text{ s}$

4. $n(t) = ks(t)r(t) = kaA^2 \cos \left(2\pi f_0 t + 2\pi \frac{\delta_f}{2t_0} t^2 \right) \cos \left(2\pi f_0 (t - \tau) + 2\pi \frac{\delta_f}{2t_0} (t - \tau)^2 \right)$

En linéarisant, on obtient

$$n(t) = \frac{kaA^2}{2} \left[\cos \left(2\pi f_0 \tau + 2\pi \frac{\delta_f}{2t_0} (2t\tau - \tau^2) \right) + \cos \left(2\pi f_0 (2t - \tau) + 2\pi \frac{\delta_f}{2t_0} (2t^2 + \tau^2 - 2\tau t) \right) \right]$$

$$\text{soit} \quad n(t) = \frac{kaA^2}{2} \left[\cos \left(2\pi \frac{\delta_f}{t_0} \tau t + 2\pi \left(f_0 \tau - \frac{\delta_f \tau^2}{2t_0} \right) \right) + \cos \left(2\pi t \left(2f_0 + \frac{\delta_f}{t_0} (t - \tau) \right) + 2\pi \left(\frac{\delta_f \tau^2}{2t_0} - f_0 \tau \right) \right) \right]$$

On pose $f_1 = \frac{\delta_f}{t_0} \tau$ et $f_2(t) = 2f_0 + \frac{\delta_f}{t_0} (t - \tau)$.

5. Déterminons l'ordre de grandeur de f_1 et de f_2 .

$$f_1 = \frac{\delta_f}{t_0} \tau \leq 1 \times 10^6 \text{ Hz}$$

On rappelle l'expression de f_2 : $f_2(t) = 2f_0 + \frac{\delta_f}{t_0} (t - \tau)$. Comme $\tau \ll t_0$, alors $t_0 - \tau \approx t_0$. On peut dire que $t - \tau \in [-\tau, t_0]$, donc

$$-\frac{\delta_f}{t_0} \tau \leq \frac{\delta_f}{t_0} (t - \tau) \leq \delta_f \quad \text{soit} \quad -1 \text{ MHz} \leq \frac{\delta_f}{t_0} (t - \tau) \leq 1 \times 10^2 \text{ MHz}$$

Comme $f_0 = 1 \times 10^4 \text{ MHz}$, on peut dire que $f_2(t) = 2f_0 + \frac{\delta_f}{t_0} (t - \tau) \approx 2f_0 = 2 \times 10^{10} \text{ Hz}$.

On constate que $f_2 \gg f_1$.

Connaissant f_1 , on en déduit τ , donc l'altitude z . Pour ne laisser passer que la composante à la fréquence f_1 , il faut un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure

$f_1 \ll f_c \ll 2f_0$. On pourra choisir par exemple $f_c = 1 \times 10^8 \text{ Hz}$.

Alors le signal filtré s'écrit $u(t) = \frac{kaA^2}{2} \cos(2\pi f_1 t + \phi)$. La mesure de la fréquence de ce signal permet de déterminer z .

6. On détermine la nature des filtres en faisant une étude du circuit à basse fréquence (BF) et à haute fréquence (HF).

— Filtres 1 et 2 :

À BF, le condensateur se comporte comme un interrupteur, donc le courant est nul, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle. D'où $u(t) = n(t)$.

À HF, le condensateur se comporte comme un fil, donc $u(t) = 0$.

Il s'agit bien d'un filtre passe-bas.

— Filtre 3 :

À BF, la bobine se comporte comme un fil et à HF c'est le condensateur qui se comporte comme un fil. Ainsi $u(t) = 0$ à BF et à HF.

Il s'agit donc d'un filtre passe-bande.

— Filtre 4 :

À BF la bobine se comporte comme un fil, $u(t) = 0$.

À HF la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil, donc $u(t) = n(t)$.

Il s'agit d'un filtre passe-haut.

— Filtres 5 et 6 :

À BF, les condensateurs se comportant comme des interrupteurs ouverts, il n'y a pas d'intensité dans le circuit, donc la tension aux bornes des résistances sont nulles. On en déduit que $u(t) = n(t)$.

À HF, les condensateurs se comportent comme des fils, donc $u(t) = 0$.

Il s'agit bien de filtres passe-bas.

7. — Filtre 1 et 2 : $\underline{H}_1 = \frac{1}{1 + jRC\omega}$

Ces deux filtres ont la même pulsation de coupure

$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{R_1 C_1} = 1 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ces filtres ne conviennent pas car la fréquence de coupure est inférieure à f_1 .

— Filtre 5 :

On note $\underline{v}$ la tension aux bornes du condensateur C_5 au centre, alors par application d'un pont diviseur de tension,

$$\underline{u} = \frac{1}{1 + jR_5 C_5 \omega} \underline{v}$$

On exprime l'impédance équivalente de l'association en parallèle du condensateur C_5 et de branche contenant R_5 et C_5 en série :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC_5 \omega + \frac{1}{R_5 + 1/(jC_5 \omega)} = jC_5 \omega + \frac{jC_5 \omega}{1 + jR_5 C_5 \omega}$$

On applique un pont diviseur de tension

$$\underline{v} = \frac{\underline{Z}}{R_5 + \underline{Z}} \underline{n} = \frac{1}{1 + R_5 / \underline{Z}} \underline{n} = \frac{1}{1 + jR_5 C_5 \omega + \frac{jR_5 C_5 \omega}{1 + jR_5 C_5 \omega}} \underline{n}$$

On en déduit alors l'expression de la fonction de transfert harmonique

$$\underline{H}_5 = \frac{\underline{u}}{\underline{v}} \times \frac{\underline{v}}{\underline{n}} = \frac{1}{1 + jR_5 C_5 \omega} \times \frac{1}{1 + jR_5 C_5 \omega \left(1 + \frac{1}{1 + jR_5 C_5 \omega} \right)}$$

$$\text{soit } \underline{H}_5 = \frac{1}{(1 + jR_5 C_5 \omega)^2 + jR_5 C_5 \omega}$$

$$\text{soit } \underline{H}_5 = \frac{1}{1 - (R_5 C_5 \omega)^2 + 3jR_5 C_5 \omega}$$

C'est un filtre passe-bas du deuxième ordre de pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{R_5 C_5} = 1 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et de facteur de qualité $Q = 1/3$. Comme $Q < 1/\sqrt{2}$, il n'y aura pas de résonance.

Ce filtre ne convient pas car la pulsation propre est trop faible. Ce filtre coupera les fréquences f_1 et $f_2(t)$.

— Filtre 6 :

En procédant de la manière manière, on obtient

$$\underline{H}_6 = \frac{1}{1 - C_{61} C_{62} (R_6 \omega)^2 + jR_6 (2C_{62} + C_{61}) \omega}$$

C'est un filtre passe-bas du deuxième ordre de pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{R_6 \sqrt{C_{61} C_{62}}} = 1 \times 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et de facteur de qualité $Q = \frac{\sqrt{C_{61} C_{62}}}{2C_{62} + C_{61}} = 1/9$. Comme $Q < 1/\sqrt{2}$, il n'y aura pas de résonance.

Ce filtre convient car la fréquence propre $f_1 < f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} < f_2(t)$.

Exercice 7: Caractéristiques d'un filtre (★★)

1. On détermine pour les trois oscillogrammes la fréquence, le gain et la phase :

(a) $f = 100 \text{ Hz}$, $G = 1,5$, $\phi = 0$

(b) $f = 5 \text{ kHz}$, $G = 2$, $\phi = 0^-$

(c) $f = 10 \text{ kHz}$, $G = 8$, $\phi = -\pi/2$

(d) $f = 100 \text{ kHz}$, $G = 0,015$, $\phi = -\pi$

On constate une résonance et un gain à haute fréquence qui est faible. Le filtre est soit un passe-bande, soit un passe-bas. Pour conclure, il faut déterminer la fréquence propre f_0 et comparer la fréquence $f = 100 \text{ Hz}$ à f_0 pour savoir si le premier oscillogramme peut être considéré comme une étude à basse fréquence.

La phase variant de 0 à $-\pi$, la fréquence propre correspond à la phase égale à $-\pi/2$, donc $f_0 = 10 \text{ kHz}$.

Comme $100 \text{ Hz} \ll f_0$, on peut dire que le gain est non nul à la limite basse fréquence. Le filtre est donc un passe-bas du second ordre.

La fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + jx/Q} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

L'expression du gain est :

$$G(x) = \frac{G_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + x^2/Q^2}} \quad \text{avec} \quad G_0 = 1,5$$

On utilise la valeur du gain à f_0 (qui est quasiment la fréquence de résonance si le filtre peut être considéré comme fortement résonant) : $G(f_0) = G_0 Q = 8$, soit

$$\boxed{Q = 5,3}.$$