# TD 1 : Traitement du signal

**Exercice 1: Réponses d'un filtre (⋆⋆)**

1. On observe que dans chaque cas qu'un signal est la dérivée de l'autre. Le filtre passe-bande possède un caractère dérivateur à BF et intégrateur à HF. On peut retrouver cela en étudier les cas limites de la fonction de transfert :

$$\underline{H} \underset{BF}{\sim} \frac{1}{-jQ\omega_0/\omega} = \frac{j\omega}{Q\omega_0} \propto j\omega$$

d'où le caractère dérivateur.

$$\underline{H} \underset{HF}{\sim} \frac{1}{jQ\omega/\omega_0} = \frac{\omega_0}{Q \times j\omega} \propto \frac{1}{j\omega}$$

d'où le caractère intégrateur.

On détermine les fréquences des signaux à partir des oscillogrammes :

— Oscillogramme de gauche : $T_1 = 4\,\text{ms}$ et $f_1 = 250\,\text{Hz}$

— Oscillogramme de droite : $T_2 = 0{,}4\,\mu\text{s}$ et $f_1 = 2{,}5 \times 10^6\,\text{Hz}$

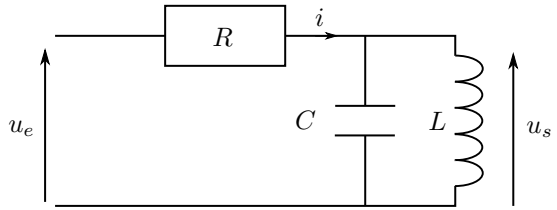
L'oscillogramme de gauche correspond au cas limite BF ($f_1 \ll f_0$), le circuit dérive le signal d'entrée. Le signal d'entrée est donc le signal triangulaire et le signal créneau est le signal de sortie.

L'oscillogramme de droite correspond au cas limite HF ($f_2 \gg f_0$), le circuit intègre le signal d'entrée. Le signal d'entrée est donc le signal triangulaire et le signal constitué d'arcs de parabole est le signal de sortie.

**Exercice 2: Le passe-bande mystère (⋆⋆)**

1. Le fait que $i$ soit non nul à BF, indique que $D_2$ n'est pas une résistance, car sinon $u_s \underset{BF}{\to} Ri \neq 0$.

Pour avoir un passe bande, il faut que $D_2$ se comporte comme un fil à BF et à HF. Il s'agit donc d'une association en parallèle d'un condensateur et d'une bobine.




La fonction de transfert harmonique s'écrit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

La pulsation de résonance correspond à la pulsation propre donc

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_r$$

La bande passante est telle que

$$\Delta f = f_0/Q = \frac{1}{2\pi RC}$$

Enfin à BF, on a la circuit équivalent à une résistance $R$, donc $\boxed{R = U/i = 1\,\text{k}\Omega}$.

On en déduit $C$ puis $L$ :

$$\boxed{C = \frac{1}{2\pi R\Delta f} = 1{,}6\,\mu\text{F}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = \frac{1}{4\pi^2 C f_0^2} = 16\,\text{mH}}$$

2. Le signal de sortie sera sinusoïdal car seule l'harmonique de rang 1 se situe dans la bande passante :

$$u_s(t) = \frac{4}{\pi^2}\cos(2\pi f_t\, t)$$

La valeur efficace est

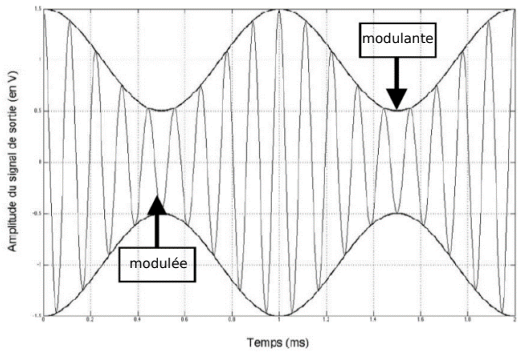
$$\boxed{U_{s,eff} = \frac{4}{\pi^2\sqrt{2}} = 0{,}29\,\text{V}}$$

3. Pour $f_t = 100\,\text{Hz}$, les principales harmoniques (les 4 premières) se situent dans la bande atténuée BF correspondant à un caractère dérivateur. Ainsi le signal de sortie sera quasi rectangulaire et de faible amplitude.

Pour $f_t = 10\,\text{kHz}$, toutes les harmoniques se situent dans la bande atténuée HF correspondant à un caractère intégrateur. Ainsi le signal de sortie sera des portions de parabole de faible amplitude.

**Exercice 3: Filtrage d'un signal modulé en amplitude (⋆⋆)**

1. La porteuse a une fréquence $f_p$ plus grande que la fréquence $F$ du signal de l'onde modulante. Ainsi l'oscillation lente est celle de l'onde modulante. C'est l'enveloppe supérieure du signal modulé.




2. Il faut linéariser pour établir la DSF de $s(t)$. On utilise la formule $2\cos(p)\cos(q) = \cos(p+q) + \cos(p-q)$ :

$$s(t) = S_m \cos(\omega_p t) + \frac{mS_m}{2}\cos((\omega_p + \Omega)t) + \frac{mS_m}{2}\cos((\omega_p - \Omega)t)$$

On aura 3 raies
- un pic à $f_p$ d'amplitude $S_m$ ;
- un pic à $f_p + F$ d'amplitude $mS_m/2$ ;
- un pic à $f_p - F$ d'amplitude $mS_m/2$.

3. La forme canonique d'un passe-bande d'orde 2 avec $f_0 = f_p$ est :

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_p} - \frac{f_p}{f}\right)}$$

On pose $f = f_p + \delta f$ avec $|\delta f|/f_p \ll 1$, alors

$$\frac{f}{f_p} = 1 + \frac{\delta f}{f_p} \quad \text{et} \quad \frac{f_p}{f} = \left(1 + \frac{\delta f}{f_p}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{\delta f}{f_p}$$

On en déduit le DL à l'ordre 1 en $\delta f/f_p$ :

$$\frac{f}{f_p} - \frac{f_p}{f} \approx 2\frac{\delta f}{f_p}$$

On obtient l'expression donnée

$$H(f) \simeq \frac{G_0}{1 + 2jQ\dfrac{f - f_p}{f_p}}.$$

4. On utilise le principe du filtrage harmonique :

$$s(t) = S_m \cos(\omega_p t) + \frac{mS_m}{2}\cos((\omega_p + \Omega)t) + \frac{mS_m}{2}\cos((\omega_p - \Omega)t)$$

donc

$$s'(t) = S_m G(f_p)\cos(\omega_p t) + \frac{mS_m}{2}G(f_p+F)\cos((\omega_p+\Omega)t+\phi(f_p+F)) + \frac{mS_m}{2}G(f_p-F)\cos((\omega_p$$

avec les gains

$$G(f_p) = G_0 \quad \text{et} \quad G(f_p + F) = G(f_p - F) = \frac{G_0}{\sqrt{1 + (2QF/f_p)^2}}$$

et les phases

$$\phi(f_p) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(f_p + F) = -\arctan(2QF/f_p) = \varphi \quad \text{et} \quad \phi(f_p - F) = -\varphi$$

On a alors

$$s'(t) = S_m G_0 \cos(\omega_p t) + \frac{mS_m}{2}G(f_p+F)\cos(\omega_p t+(\Omega t+\varphi)) + \frac{mS_m}{2}G(f_p+F)\cos(\omega_p t-(\Omega t+\varphi)$$

On en déduit

$$s'(t) = S'_m\left(1 + m'\cos(\Omega t + \varphi)\right)\cos(\omega_p t).$$

avec

$$\boxed{S'_m = S_m G_0 \quad ; \quad \varphi = -\arctan(2QF/f_p) \quad \text{et} \quad m' = \frac{m}{\sqrt{1 + (2QF/f_p)^2}} < m}$$

Le filtre induit donc un déphasage $\varphi$ et une diminution du taux demodulation
On calcule la diminution relative de l'indice de modulation :

$$\frac{m - m'}{m} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (2QF/f_p)^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (100 \times 0,005)^2}} = 0,11$$

soit une diminution relative de 11%.

**Exercice 4: Étude d'un filtre en peigne de fréquence (⋆⋆)**

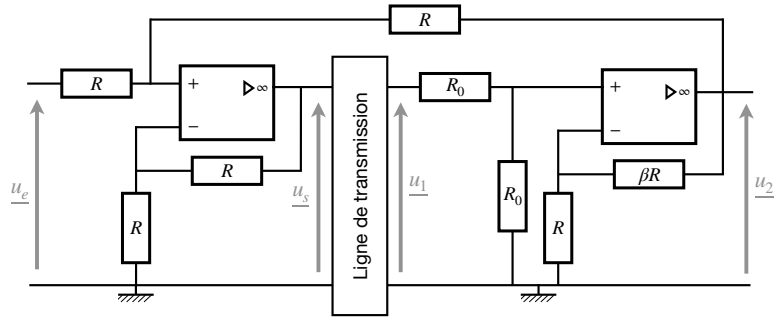
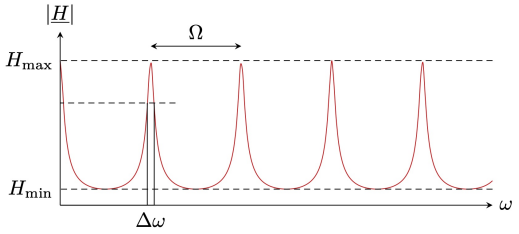



FIGURE 1 – Schéma du filtre en peigne de fréquence.

1. La fonction de transfert a un module égal à 1 et n'induit donc qu'un déphasage de $-\omega\tau$ au signal $\underline{u_s}$.
   Si l'on note $\underline{u_s} = U_s e^{j\omega t}$, alors :
   $$\underline{u_1} = \underline{H}_B(j\omega)\underline{u_s} = U_s e^{j\omega(t-\tau)}$$
   Tout comme lors d'une propagation de signal, le signal de sortie $\underline{u_1}$ est égal au signal d'entrée $\underline{u_s}$ mais décalé d'un retard $\tau$ (dû à la propagation dans la ligne à retard).
2. La présence d'une rétroaction sur la borne inverseuse indique un possible régime linéaire.
3. Comme l'ALI est idéal, le courant $i_+$ en entrée de la borne non-inverseuse est nul, donc les deux résistances $R_0$ sont en série. En appliquant un pont diviseur de tension, on trouve que $\boxed{\underline{V_+} = \dfrac{R_0}{R_0 + R_0}\underline{u_1} = \dfrac{\underline{u_1}}{2}}$.
4. Un raisonnement similaire à la question précédente permet d'obtenir : $\boxed{\underline{V_-} = \dfrac{R}{R+\beta R}\underline{u_2} = \dfrac{1}{1+\beta}\underline{u_2}}$.
5. Comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, $\underline{V_-} = \underline{V_+}$, d'où :
   $$\frac{1}{1+\beta}\underline{u_2} = \frac{\underline{u_1}}{2} \implies \underline{H_2}(j\omega) = \frac{\underline{u_2}}{\underline{u_1}} = \frac{1+\beta}{2} = \alpha$$
6. À l'aide d'une loi des nœuds exprimée en termes de potentiels au niveau de l'entrée non-inverseuse, on obtient :
   $$\frac{\underline{u_e} - \underline{V_+}}{R} + \frac{\underline{u_2} - \underline{V_+}}{R} = i_+ = 0 \implies 2\underline{V_+} = \underline{u_e} + \underline{u_2}$$
   Ensuite, à l'aide d'un pont diviseur de tension (ou avec une autre loi des nœuds en terme de potentiels), on obtient au niveau de l'entrée inverseuse :
   $$\underline{V_-} = \frac{R}{R+R}\underline{u_s} = \implies 2\underline{V_-} = \underline{u_s}$$
   Ainsi, comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, $\underline{V_-} = \underline{V_+}$, d'où $\boxed{\underline{u_s} = \underline{u_e} + \underline{u_2}}$.
7. Sachant que $\underline{u_1} = \underline{u_s}e^{-j\omega\tau}$ et $\underline{u_2} = \alpha\underline{u_1} = \alpha\underline{u_s}e^{-j\omega\tau}$, on obtient :
   $$\underline{u_e} + \alpha\underline{u_s}e^{-j\omega\tau} = \underline{u_s} \implies \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega\tau}}}$$
8. Comme $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1-(\alpha\cos(-\omega\tau) + j\alpha\sin(-\omega\tau)} = \dfrac{1}{(1-\alpha\cos(\omega\tau)) + j\alpha\sin(\omega\tau)}$, alors :
   $$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{(1-\alpha\cos(\omega\tau))^2 + (\alpha\sin(\omega\tau))^2} = \frac{1}{1 - 2\alpha\cos(\omega\tau) + \alpha^2\cos(\omega\tau)^2 + \alpha^2\sin(\omega\tau)^2}$$
   On obtient bien alors : $\boxed{|\underline{H}(j\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega\tau)}}$




9. Le maximum de $|\underline{H}(j\omega)|$ est atteint lorsque $\cos(\omega\tau) = 1$, d'où $\boxed{H_{\max} = \dfrac{1}{1-\alpha}}$.
   Le minimum est atteint pour $\cos(\omega\tau) = -1$, d'où $\boxed{H_{\min} = \dfrac{1}{1+\alpha}}$.
   On cherche $\Omega$ tel que $|\underline{H}(j(\omega+\Omega))| = |\underline{H}(j\omega)|$, soit tel que $\cos((\omega+\Omega)\tau) = \cos(\omega\tau)$.
   Comme cos est $2\pi$-périodique, on obtient $\Omega\tau = 2\pi$ soit $\boxed{\Omega = \dfrac{2\pi}{\tau}}$.

10. Il faut déterminer la pulsation de coupure telle que $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega_c)| = H_{\max}/\sqrt{2}$, soit :

$$\frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega_c\tau)} = \frac{1}{2(1-\alpha)^2}$$

En simplifiant, on obtient : $\cos(\omega_c\tau) = \frac{4\alpha-1-\alpha^2}{2\alpha}$. La plus faible pulsation de coupure $\omega_c$ nous donnera la demi largeur de la bande passante (car le premier maximum de $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|$ est centré en $\omega = 0$), soit

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}\mathrm{Arccos}\left(\frac{4\alpha-1-\alpha^2}{2\alpha}\right) \implies \boxed{\Delta\omega = \frac{2}{\tau}\mathrm{Arccos}\left(\frac{4\alpha-1-\alpha^2}{2\alpha}\right)}$$

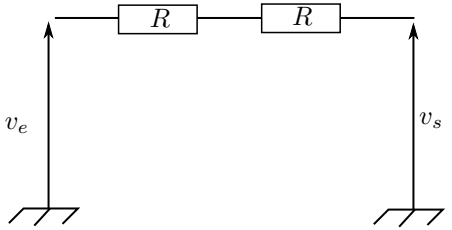
.

11. Compte tenu de l'allure de $|\underline{H}(\mathrm{j}\omega)|$, le filtre laisse passer toutes les pulsations multiples de $\Omega$ (soit les fréquences multiples de $\Omega/2\pi$). Comme le signal d'intérêt est périodique de période $T$, cela signifie que sa décomposition en série de Fourier est composée uniquement de fréquences multiples de $1/T$.
Ainsi, pour que le filtre ne transmette que les harmoniques du signal d'intérêt (et élimine le bruit), il faut que :

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \implies \boxed{\tau = T}$$

**Exercice 5: Étude d'un filtre($\star\star\star$)**

1. À BF les condensateurs se comportant comme des interrupteurs ouverts, le circuit revient au schéma suivant




On a alors $u_s \underset{BF}{\approx} u_e$

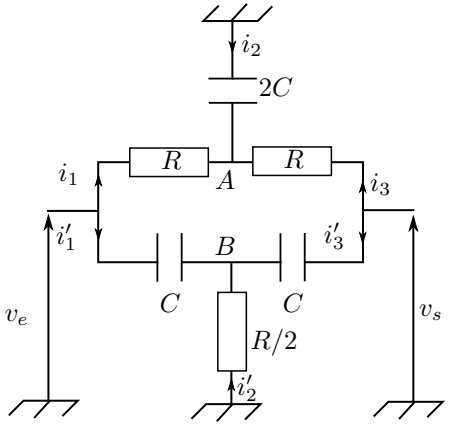
À HF les condensateurs se comportant comme des fils, on a $u_s \underset{HF}{\approx} u_e$

Il s'agit d'un réjecteur de bande.

2. On applique une loi des nœuds en terme de potentiel en $A$ et $B$, et on remarque que $i_3' = -i_3$ car il n'y a pas de courant en sortie (ce qui n'est pas le cas en entrée). Cela fera 3 équations pour 3 inconnues $v_A$, $v_B$ et $u_s$.

$$\begin{cases} \dfrac{v_e - v_A}{R} + \dfrac{v_s - v_A}{R} - 2jC\omega v_A = 0 \\ (v_e - v_B)\, jC\omega + (v_s - v_B)\, jC\omega - \dfrac{2v_B}{R} = 0 \\ \dfrac{v_s - v_A}{R} = (v_B - v_s) jC\omega \end{cases}$$

$$\text{soit} \quad \begin{cases} 2v_A(1+jRC\omega) = u_e + u_s \\ 2v_B(1+jRC\omega) = (u_e+u_s)jRC\omega \\ u_s(1+jRC\omega) = v_A + v_B\, jRC\omega \end{cases}$$




On note $x = RC\omega$. En faisant le rapport des deux premières équations, on a

$$\frac{v_B}{v_A} = jx \quad \text{soit} \quad v_B = jx\, v_A$$

La troisième équation donne alors

$$\boxed{u_s(1+jx) = v_A\left(1-x^2\right)}$$

On exprime alors $v_A$ :

$$v_A = \frac{u_e+u_s}{2(1+jx)} \quad \text{donc} \quad u_s(1+jx) = \frac{u_e+u_s}{2(1+jx)}\left(1-x^2\right)$$

On isole $u_s$ :

$$u_s\left(\frac{2(1+jx)^2}{1-x^2}-1\right)=u_e \quad \text{soit} \quad u_s\left(\frac{2+4jx-2x^2-1+x^2}{1-x^2}\right)=u_e$$

On obtient alors la fonction de transfert harmonique

$$\underline{H}=\frac{1}{\dfrac{1-x^2+4jx}{1-x^2}}=\frac{1}{1+\dfrac{4jx}{1-x^2}}$$

On obtient la forme demandée avec $\boxed{Q=1/4}$.

3. $\boxed{G_{\text{dB}}=-10\log\left(1+\dfrac{16x^2}{(1-x^2)^2}\right)}$

4. — $x\longrightarrow 0$, $G_{\text{dB}}\longrightarrow 0$
   — $x\longrightarrow \infty$, $G_{\text{dB}}\longrightarrow 0$
   — $x\longrightarrow 1$, $G_{\text{dB}}\longrightarrow -\infty$

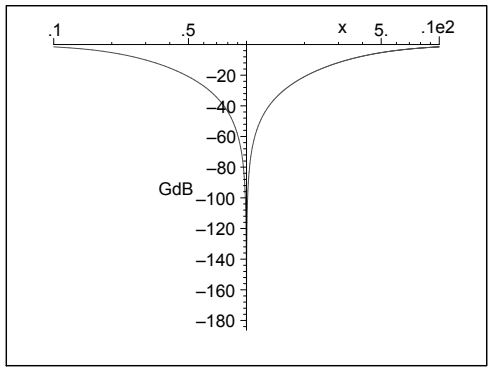
5. $H_{max}=1$, on cherche $x$ tel que : $\left(\frac{4x}{1-x}\right)^2\geq 1$

   La bande de réjection est $\Delta x=[x_1;x_2]$, avec $x_1$ et $x_2$ solutions de l'équation :

$$x^2\pm 4x-1=0$$

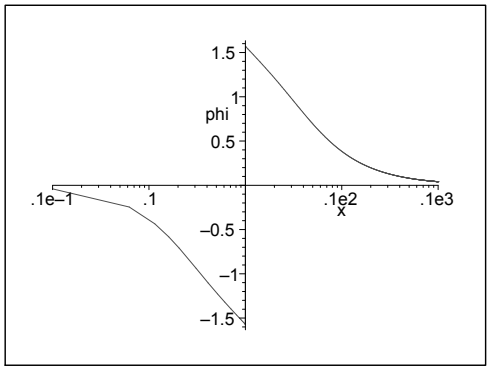
$$x_2=2+\sqrt{5}=4,2 \quad \text{et} \quad x_1=-2+\sqrt{5}=0,2$$

$\boxed{\Delta x=4=1/Q}$

6. 


7. $\boxed{\phi=-\arctan\left(\dfrac{4x}{1-x^2}\right) \qquad \phi\in]-\pi/2;\pi/2[}$

   — $x\longrightarrow 0$, $\phi\longrightarrow 0$
   — $x\longrightarrow \infty$, $\phi\longrightarrow 0$
   — $x\longrightarrow 1^-$, $\phi\longrightarrow -\pi/2$
   — $x\longrightarrow 1^+$, $\phi\longrightarrow \pi/2$




**Exercice 6: Le guidage des avions, un instrument essentiel : l'altimètre.(⋆⋆⋆) (*Mines-Ponts PC Physique 2 2011*)**

1. Pour $t\in[0,t_0[$, $\boxed{f_s(t)=f_0+\dfrac{\delta_f}{t_0}t}$

2. $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=2\pi f_s(t)=2\pi f_0+2\pi\dfrac{\delta_f}{t_0}t$

   Par intégration, $\theta(t)=2\pi f_0 t+2\pi\dfrac{\delta_f}{2t_0}t^2+K$, avec $K$ une constante d'intégration.

   Or à $t=0$, $\theta(0)=0$, donc $K=0$. D'où $\boxed{\theta(t)=2\pi f_0 t+2\pi\dfrac{\delta_f}{2t_0}t^2}$.

   On en déduit l'expression de $s(t)$ de l'énoncé :

$$s(t)=A\cos\left[2\pi f_0 t+2\pi\frac{\delta_f}{2t_0}t^2\right].$$

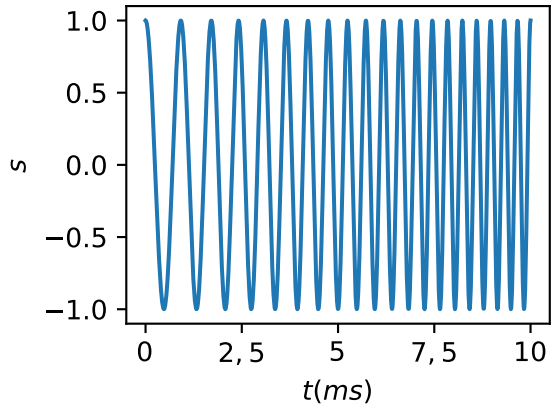
On met ce signal sous la forme $s(t) = A\cos(2\pi f(t) \times t)$ :

$$s(t) = A\cos\left[2\pi f_0 t\left(1 + \frac{\delta_f}{2f_0 t_0}t\right)\right] \quad \text{soit} \quad s(t) = A\cos\left[2\pi f_0 t\,(1+\omega_1 t)\right]$$

On pose alors la fréquence $\boxed{f(t) = f_0\,(1+\omega_1 t)}$.

L'application numérique de $\omega_1$ donne $\boxed{\omega_1 = 0{,}5\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}}$.

On trace alors un signal modulé en fréquence :




3. On trouve $\tau = 2{,}00 \times 10^{-5}\,\text{s}$

4. $n(t) = ks(t)r(t) = kaA^2\cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi\frac{\delta_f}{2t_0}t^2)\right)\cos\left(2\pi f_0(t-\tau) + 2\pi\frac{\delta_f}{2t_0}(t-\tau)^2\right)$

   En linéarisant, on obtient

$$n(t) = \frac{kaA^2}{2}\left[\cos\left(2\pi f_0\tau + 2\pi\frac{\delta_f}{2t_0}(2t\tau - \tau^2)\right)\right.$$
$$\left. + \cos\left(2\pi f_0(2t-\tau) + 2\pi\frac{\delta_f}{2t_0}(2t^2+\tau^2-2\tau t)\right)\right]$$

$$\text{soit} \quad n(t) = \frac{kaA^2}{2}\left[\cos\left(2\pi\frac{\delta_f}{t_0}\tau\,t + 2\pi\left(f_0\tau - \frac{\delta_f\tau^2}{2t_0}\right)\right)\right.$$
$$\left. + \cos\left(2\pi t\left(2f_0 + \frac{\delta_f}{t_0}(t-\tau)\right) + 2\pi\left(\frac{\delta_f\tau^2}{2t_0} - f_0\tau\right)\right)\right]$$

On pose $\boxed{f_1 = \frac{\delta_f}{t_0}\tau}$ et $\boxed{f_2(t) = 2f_0 + \frac{\delta_f}{t_0}(t-\tau)}$.

5. Déterminons l'ordre de grandeur de $f_1$ et de $f_2$.

$$f_1 = \frac{\delta_f}{t_0}\tau \leq 1 \times 10^6\,\text{Hz}$$

On rappelle l'expression de $f_2$ : $f_2(t) = 2f_0 + \frac{\delta_f}{t_0}(t-\tau)$. Comme $\tau \ll t_0$, alors $t_0 - \tau \approx t_0$. On peut dire que $t - \tau \in [-\tau, t_0]$, donc

$$-\frac{\delta_f}{t_0}\tau \leq \frac{\delta_f}{t_0}(t-\tau) \leq \delta_f \quad \text{soit} \quad -1\,\text{MHz} \leq \frac{\delta_f}{t_0}(t-\tau) \leq 1 \times 10^2\,\text{MHz}$$

Comme $f_0 = 1 \times 10^4\,\text{MHz}$, on peut dire que $f_2(t) = 2f_0 + \frac{\delta_f}{t_0}(t-\tau) \approx 2f_0 = 2 \times 10^{10}\,\text{Hz}$.

On constate que $f_2 \gg f_1$.

Connaissant $f_1$, on en déduit $\tau$, donc l'altitude $z$. Pour ne laisser passer que la composante à la fréquence $f_1$, il faut un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure $\boxed{f_1 \ll f_c \ll 2f_0}$. On pourra choisir par exemple $f_c = 1 \times 10^8\,\text{Hz}$.

Alors le signal filtré s'écrit $\boxed{u(t) = \frac{kaA^2}{2}\cos(2\pi f_1 t + \phi)}$. La mesure de la fréquence de ce signal permet de déterminer $z$.

6. On détermine la nature des filtres en faisant une étude du circuit à basse fréquence (BF) et à haute fréquence (HF).
   - Filtres 1 et 2 :
     À BF, le condensateur se comporte comme un interrupteur, donc le courant est nul, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle. D'où $u(t) = n(t)$.
     À HF, le condensateur se comporte comme un fil, donc $u(t) = 0$.
     Il s'agit bien d'un filtre passe-bas.
   - Filtre 3 :
     À BF, la bobine se comporte comme un fil et à HF c'est le condensateur qui se comporte comme un fil. Ainsi $u(t) = 0$ à BF et à HF.
     Il s'agit donc d'un filtre passe-bande.
   - FIltre 4 :
     À BF la bobine se comporte comme un fil, $u(t) = 0$.

À HF la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil, donc $u(t) = n(t)$.

Il s'agit d'un filtre passe-haut.

— Filtres 5 et 6 :

À BF, les condensateurs se comportant comme des interrupteurs ouverts, il n'y a pas d'intensité dans le circuit, donc la tension aux bornes des résistances sont nulles. On en déduit que $u(t) = n(t)$.

À HF, les condensateurs se comportent comme des fils, donc $u(t) = 0$.

Il s'agit bien de filtres passe-bas.

7. — Filtre 1 et 2 : $\underline{H_1} = \dfrac{1}{1 + jRC\omega}$

Ces deux filtres ont la même pulsation de coupure

$$\omega_c = \frac{1}{R_1 C_1} = \frac{1}{R_1 C_1} = 1 \times 10^3 \,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

Ces filtres ne conviennent pas car la fréquence de coupure est inférieure à $f_1$.

— Filtre 5 :

On note $\underline{v}$ la tension aux bornes du condensateur $C_5$ au centre, alors par application d'un pont diviseur de tension,

$$\underline{u} = \frac{1}{1 + jR_5C_5\omega}\underline{v}$$

On exprime l'impédance équivalente de l'association en parallèle du condensateur $C_5$ et de branche contenant $R_5$ et $C_5$ en série :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC_5\omega + \frac{1}{R_5 + 1/(jC_5\omega)} = jC_5\omega + \frac{jC_5\omega}{1 + jR_5C_5\omega}$$

On applique un pont diviseur de tension

$$\underline{v} = \frac{\underline{Z}}{R_5 + \underline{Z}}\underline{n} = \frac{1}{1 + R_5/\underline{Z}}\underline{n} = \frac{1}{1 + jR_5C_5\omega + \dfrac{jR_5C_5\omega}{1 + jR_5C_5\omega}}\underline{n}$$

On en déduit alors l'expression de la fonction de transfert harmonique

$$\underline{H_5} = \frac{\underline{u}}{\underline{v}} \times \frac{\underline{v}}{\underline{n}} = \frac{1}{1 + jR_5C_5\omega} \times \frac{1}{1 + jR_5C_5\omega\left(1 + \dfrac{1}{1 + jR_5C_5\omega}\right)}$$

$$\text{soit} \quad \underline{H_5} = \frac{1}{(1 + jR_5C_5\omega)^2 + jR_5C_5\omega}$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\underline{H_5} = \frac{1}{1 - (R_5C_5\omega)^2 + 3jR_5C_5\omega}}$$

C'est un filtre passe-bas du deuxième ordre de pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{R_5C_5} = 1 \times 10^3 \,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et de facteur de qualité $Q = 1/3$. Comme $Q < 1/\sqrt{2}$, il n'y aura pas de résonance.

Ce filtre ne convient pas car la pulsation propre est trop faible. Ce filtre coupera les fréquences $f_1$ et $f_2(t)$.

— Filtre 6 :

En procédant de la manière manière, on obtient

$$\underline{H_6} = \frac{1}{1 - C_{61}C_{62}(R_6\omega)^2 + jR_6(2C_{62} + C_{61})\omega}$$

C'est un filtre passe-bas du deuxième ordre de pulsation propre $\omega_0 = \dfrac{1}{R_6\sqrt{C_{61}C_{62}}} = 1 \times 10^8 \,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ et de facteur de qualité $Q = \dfrac{\sqrt{C_{61}C_{62}}}{2C_{62} + C_{61}} = 1/9$. Comme $Q < 1/\sqrt{2}$, il n'y aura pas de résonance.

Ce filtre convient car la fréquence propre $\boxed{f_1 < f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} < f_2(t)}$.

**Exercice 7: Caractéristiques d'un filtre (⋆⋆)**

1. On détermine pour les trois oscillogrammes la fréquence, le gain et la phase :
   (a) $f = 100\,\mathrm{Hz}$, $G = 1,5$, $\phi = 0$
   (b) $f = 5\,\mathrm{kHz}$, $G = 2$, $\phi = 0^-$
   (c) $f = 10\,\mathrm{kHz}$, $G = 8$, $\phi = -\pi/2$
   (d) $f = 100\,\mathrm{kHz}$, $G = 0,015$, $\phi = -\pi$

   On constate une résonance et un gain à haute fréquence qui est faible. Le filtre est soit un passe-bande, soit un passe-bas. Pour conclure, il faut déterminer la fréquence propre $f_0$ et comparer la fréquence $f = 100\,\mathrm{Hz}$ à $f_0$ pour savoir si le premier oscillogramme peut être considéré comme une étude à basse fréquence.

   La phase variant de 0 à $-\pi$, la fréquence propre correspond à la phase égale à $-\pi/2$, donc $\boxed{f_0 = 10\,\mathrm{kHz}}$.

Comme $100\,\text{Hz} \ll f_0$, on peut dire que le gain est non nul à la limite basse fréquence. Le filtre est donc un passe-bas du second ordre.
La fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 - x^2 + jx/Q} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

L'expression du gain est :

$$G(x) = \frac{G_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}} \quad \text{avec} \quad G_0 = 1,5$$

On utilise la valeur du gain à $f_0$ (qui est quasiment la fréquence de résonance si le filtre peut être considéré comme fortement résonant) : $G(f_0) = G_0 Q = 8$, soit $\boxed{Q = 5,3}$.

**Exercice 8: Convertisseur analogique-numérique parallèle (CAN flash) 3 bits (⋆)**

1. $V_1^+ = e$ et par un pont diviseur de tension :

$$V_1^- = \frac{R/2}{8R} E_{\text{ref}} = 0,5\,\text{V}$$

$$s_i = \begin{cases} +V_{\text{sat}} = 15\,\text{V} & \text{si} \quad e > 0,5\,\text{V} \\ -V_{\text{sat}} = -15\,\text{V} & \text{si} \quad e < 0,5\,\text{V} \end{cases}$$

2. On détermine les tensions sur l'entrée inverseuse de chaque ALI :
   — $V_2^- = \dfrac{3R/2}{8R} E_{\text{ref}} = 1,5\,\text{V}$
   — on a un pas de 1 V en chaque tension, donc

$$V_3^- = 2,5\,\text{V} \quad ; \quad V_4^- = 3,5\,\text{V} \quad ; \quad V_5^- = 4,5\,\text{V} \quad ;$$

$$V_6^- = 5,5\,\text{V} \quad ; \quad V_7^- = 6,5\,\text{V}$$

3.

| $e$(V) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Sortie des ALI | 0000000 | 0000001 | 0000011 | 0000111 | 0001111 |
| Code | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 |

| $e$(V) | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|
| Sortie des ALI | 0011111 | 0011111 | 1111111 |
| Code | 101 | 110 | 111 |

4. cf question précédente
5. Sur 3 bits, on encode $N = 2^3 = 8$ valeurs et il faut 7 ALI, $(N-1)$ ALI.
   Sur 16 bits, on encode $N = 2^{16} = 65536$ valeurs. Il faudra 65535 ALI...

**Exercice 9: Tester ses connaissances : Electronique numérique (⋆)**

1. FAUX. La numérisation est accompagnée de nombreux défauts. Le repliement de spectre en est une. Par ailleurs, la numérisation s'accompagne nécessairement d'une perte d'information, chaque échantillon étant codé sur un nombre donné de bits. D'ailleurs, les mélomanes avertis vous diront qu'ils préfèrent encore écouter de bons vieux vinyles... Bon en vérité, la numérisation actuelle est de tellement bonne qualité, que les vinyles n'apportent rien de plus. Mais bon, la nostalgie toussa toussa...
2. FAUX. Le signal acoustique initial est de toute façon analogique (sauf si le concert consiste en de la musique purement numérique, mais ce n'est pas le cas de Céline <3 !). Il devra donc d'abord être converti en une tension électrique analogique, puis être filtré passe-bas pour respecter le critère de Shannon. Ce n'est qu'ensuite que le signal est numérisé par un CAN.
3. VRAI. C'est même presque trop pour si peu !
4. FAUX. Le critère de Shannon est certes vérifié pour le fondamental et les deux premières harmoniques (un créneau ne contient que des harmoniques de rangs impairs : $3f_0$, $5f_0$...) mais de nombreuses harmoniques ne respectent pas Shannon. Il va y avoir repliement du spectre.
5. VRAI. Le signal contient les trois fréquences de départ mais aussi les trois fréquences $|f_i + m \times f_e|$.
6. FAUX. La fréquence d'échantillonnage respecte en effet le critère de Nyquist-Shannon. Néanmoins, avec seulement 1000 points, la résolution spectrale est de $\Delta f = f_e/1000 = 500\,\text{Hz}$. Il va donc être impossible de localiser précisément sur le spectre le pic à 100 Hz. On retiendra de cela qu'il est très difficile d'obtenir un spectre de qualité lorsque le signal fait intervenir des fréquences très éloignées. En effet, les hautes fréquences du signal imposent une haute fréquence d'échantillonnage tandis que les basses fréquences du signal imposent une haute résolution spectrale ($\Delta f$ faible). Il faut alors un très grand nombre d'échantillons.

7. VRAI. Le La4 est à l'octave supérieure donc 880 Hz et le La5 à 1760 Hz. Le La5 ne respectant plus le critère de Nyquist-Shannon, le repliement spectral induit une harmonique fantôme à la fréquence $2000 - 1760 = 240$ Hz, qui est effectivement une fréquence inférieure (donc un son plus grave) que le La3 d'origine.
8. VRAI. C'est même pour ça que l'on adore le filtrage numérique. Il suffit de changer quelques lignes dans le script du filtre pour modifier son effet. On range les fers à souder !
9. FAUX. La séparation fréquentielle se retrouve dans d'autres dispositifs : l'oreille humaine qui sépare les sons aigus des sons graves, l'oeil qui sépare le rouge du bleu, le prisme ou le réseau qui sépare lui aussi les couleurs... La détection synchrone (que nous verrons prochainement) est aussi une forme de sélection d'une unique fréquence dans un signal quelconque de contenu fréquentiel large.

**Exercice 10: Échantillonnage (⋆)**

1. (a) Le pas de quantification $q$ se calcule par :

$$q = \frac{\Delta S}{2^n}$$

où $n$ est le nombre de bits.

| Nombre de bits | Résolution |
|---|---|
| 4 bits | $q = \frac{10}{2^4} = 0{,}625\,\text{V}$ |
| 8 bits | $q = \frac{10}{2^8} \approx 39\,\text{mV}$ |
| 12 bits | $q = \frac{10}{2^{12}} \approx 2{,}4\,\text{mV}$ |
| 16 bits | $q = \frac{10}{2^{16}} \approx 152\,\mu\text{V}$ |

(b) — Pour $n \geq 12$ bits ($q \leq 2.4\,\text{mV}$), le bruit est inférieur au pas
— Pour $n = 16$ bits ($q \approx 152\,\mu\text{V}$), le bruit domine la quantification
— Le compromis optimal semble être 12 bits

2. (a) On compte 8 niveaux sur un $\Delta V = 2 - (-3) = 5\,\text{V} \Rightarrow$ donc un pas de $5/8 = 0{,}625\,\text{V} \Rightarrow$ cela correspond bien a ce qu'on a calculé pour un convertisseur 4 bits.

(b) La dynamique d'un convertisseur est le rapport $\frac{V_{max}}{\delta V} = \frac{2^n - 1}{1} = 15$ pour un convertisseur 4 bits

(c) La résolution étant 16 fois meilleure qu'en 4 bits, les marches ne sont plus visibles à l'œil nu sur les oscillogrammes fournis. Une analyse plus fine serait nécessaire.