

Préparation à l'interrogation n°02

1 Trigonométrie

$$1. \cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad 2. \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

2 Calcul intégral

$$1. \int^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad 2. \int^x (1-t)^n dt \quad 3. \int^x \frac{dt}{1-t^2}$$

3 Formules

$$1. \text{ Inégalité de Taylor-Lagrange} \quad 2. \sum_{k=n}^{+\infty} \alpha^k \text{ avec } |\alpha| < 1$$

4 Racines de l'unité

Soit n entier non nul. On a $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$

$$\text{On a } \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = X^n - 1 \quad \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = \delta_{n,1} \quad \text{et} \quad \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n-1}$$

5 Étude asymptotique

1. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\cos(x)$;
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$;
3. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\frac{1}{1-x}$;
4. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$1 - \cos(t)^n = 1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)^n = 1 - \left(1 - \frac{nt^2}{2} + o(t^2) \right) = \frac{nt^2}{2} + o(t^2)$$

6 Techniques

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([0; 1], \mathbb{K})$. D'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$$

Application : Soit $\alpha > 0$. Pour n entier non nul, on a

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha n^{\alpha+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{1}{\alpha+1}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$$

7 Polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et m entier non nul. On a

$$a \text{ racine d'ordre } m \iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$$

$$a \text{ racine d'ordre au moins } m \iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$$

8 Exercice type

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des suites à valeurs dans $]0; +\infty[$ avec

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ ou } +\infty$$

Alors, on a

$$\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$$

Corrigé : On a $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n(1 + o(1))$ d'où

$$\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(v_n) + \ln(1 + o(1)) = \ln(v_n) + o(1) = \ln(v_n) + o(\ln(v_n))$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

9 Exercice type

Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.

2. En déduire une expression de $I_{p,q}$ avec des factorielles.

Corrigé : 1. En intégrant par parties (fonctions $\mathcal{C}^1$), il vient

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt = \left[\frac{t^{p+1}(1-t)^q}{p+1} \right]_0^1 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1} dt$$

Autrement dit

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$

2. Par une récurrence immédiate, on obtient

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad I_{p,q} = \frac{q \times (q-1) \times \dots \times 1}{(p+1) \times (p+2) \times \dots \times (p+q)} I_{p+q,0}$$

avec

$$I_{p+q,0} = \int_0^1 t^{p+q} dt = \frac{1}{p+q+1}$$

puis

$$I_{p,q} = \frac{1 \times \dots \times (p-1) \times p \times q!}{1 \times \dots \times p \times (p+1) \times \dots \times (p+q)} I_{p+q,0} = \frac{p! q!}{(p+q)!} \frac{1}{(p+q+1)}$$

D'où

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad I_{p,q} = \frac{1}{(p+q+1) \binom{p+q}{p}}$$

10 Questions de cours

Séries numériques, graphes usuels.