

Feuille d'exercices n°06

Exercice 1 (***)

Soient $a, b > 0$.

1. Justifier l'existence pour x réel de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$$

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer F' .
3. En déduire une expression de $F(x)$ pour x réel.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)$

avec $X = \mathbb{R}$ et $I =]0; +\infty[$. Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux puis

$$f(x, t) = \frac{1 - at - (1 - bt) + o(t)}{t} \cos(xt) = (a - b + o(1)) \cos(xt) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} a - b$$

et par croissances comparées $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$ sur I et par conséquent

La fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et intégrable d'après l'étude précédente.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt)$$

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = e^{-at} + e^{-bt}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ et φ intégrable sur I puisque $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \left[-\frac{e^{-at}}{a} - \frac{e^{-bt}}{b} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Ainsi

$$F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Soit x réel. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} [e^{-bt} - e^{-at}] \sin(xt) dt$$

Par convergence absolue de $\int_0^{+\infty} e^{-(b-ix)t} dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-(a-ix)t} dt$, il vient

$$F'(x) = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} [e^{-(b-ix)t} - e^{-(a-ix)t}] dt \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{b-ix} - \frac{1}{a-ix} \right)$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \frac{x}{b^2 + x^2} - \frac{x}{a^2 + x^2}}$$

3. Par intégration il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} \right) + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, on emploie une technique à la « Riemann-Lebesgue ». On pose

$$\forall t > 0 \quad \varphi(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$$

Les fonctions φ et $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec

$$\varphi(t) \frac{\sin(xt)}{x} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(t) \frac{\sin(xt)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt$ et $\int_0^{+\infty} \varphi'(t) \frac{\sin(xt)}{x} dt$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt = \left[\varphi(t) \frac{\sin(xt)}{x} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \sin(xt) dt$$

Par dérivation $\forall t > 0 \quad \varphi'(t) = \frac{t(-ae^{-at} + be^{-bt}) - e^{-at} + e^{-bt}}{t^2}$

d'où $\varphi'(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{t^2(a^2 - b^2)/2 + o(t^2)}{t^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \frac{a^2 - b^2}{2} \quad \text{et} \quad \varphi'(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Ainsi, la fonction φ' est intégrable sur I et par inégalité triangulaire

$$\left| \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \sin(xt) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt$$

Par suite $F(x) = \frac{O(1)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$

On en déduit $\alpha = 0$ et finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2} \right)}$$

Exercice 2 (***)

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{Arctan}(x \tan(t))}{\tan(t)} dt$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour x réel.

3. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)} dt = \frac{\pi}{2} \ln(2) \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\text{Arctan}(x \tan(t))}{\tan(t)}$

avec $X = \mathbb{R}$ et $I =]0; \frac{\pi}{2}[$. On vérifie :

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ avec

$$f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} x \quad \text{et} \quad f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{\pi}{2}]{} 0$$

La fonction est prolongeable par continuité en 0 et $\frac{\pi}{2}$ donc intégrable sur I.

- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{1 + (x \tan(t))^2}$$

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.

- Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 1$$

La dominante φ est clairement continue par morceaux, intégrable sur I. Ainsi

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$$

2. La fonction F est clairement impaire. On restreint l'étude à $x \geq 0$. Par dérivation sous l'intégrale, on trouve

$$\forall x \geq 0 \quad F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + (x \tan(t))^2}$$

Le changement de variable $u = \tan(t)$ donne

$$\forall x \geq 0 \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)(1 + x^2 u^2)}$$

Par décomposition en éléments simples, pour $x \neq 1$, on obtient

$$F'(x) = \frac{1}{1 - x^2} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{1 + u^2} - \frac{x^2}{1 + x^2 u^2} \right] du = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + x}$$

et l'égalité vaut aussi pour $x = 1$ puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc F' continue en 1. Par intégration, on trouve

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) = F(0) + \int_0^x F'(v) dv = \frac{\pi}{2} \ln(1 + x)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \ln(1 + x) & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \ln(1 - x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

Remarque : Pour faire efficacement la décomposition en éléments simples, on peut considérer

$$\frac{1}{(1 + v)(1 + x^2 v)} = \frac{x^2 v + 1 - x^2(v + 1)}{(1 + v)(1 + x^2 v)} \frac{1}{1 - x^2}$$

et l'appliquer en $v = u^2$.

3. On a $\text{Arctan}(\tan(t)) = t$ pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ d'où

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)} dt = F(1) = \frac{\pi}{2} \ln(2)}$$

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(\sin(t))$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ avec

$$t \ln(\sin(t)) = t \ln(t + o(t)) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad t \ln(\sin(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{\pi}{2}]{} 0$$

D'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)} dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)} dt = \underbrace{[t \ln(\sin(t))]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$$

Ainsi

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2)}$$

Exercice 3 (****)

On pose $\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$

1. Montrer que F et G sont définies, continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et qu'elles sont toutes deux solutions de l'équation

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Corrigé : 1. La continuité de F sur $\mathbb{R}_+$ est traitée dans l'exercice 3 de la feuille 7. Soit $x \geq 0$.

On a $t \mapsto \frac{1}{x+t}$ et $t \mapsto 1 - \cos(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$-\frac{1 - \cos(t)}{x+t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1 - \cos(t)}{x+t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Ainsi, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} dt$

sont de même nature. La seconde converge puisque

$$\frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1) \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par conséquent, on a l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = \underbrace{\left[\frac{1 - \cos(t)}{x+t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} dt$$

La domination $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times]0; +\infty[\quad 0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{(x+t)^2} \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$

permet d'établir sans difficulté la continuité de la nouvelle écriture de G et on conclut

Les fonctions F et G sont définies, continues sur $\mathbb{R}_+$.

2. Une domination locale permet d'établir sans difficulté que $F \in \mathcal{C}^2(]0; +\infty[, \mathbb{R})$. Pour $x > 0$, on obtient par changement de variable

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u-x)}{u} du = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(x) \sin(u) - \sin(x) \cos(u)}{u} du$$

Les intégrales $A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ et $B(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ convergent (voir exercice 4, question 2, feuille n°2). Ainsi, par linéarité

$$\forall x > 0 \quad G(x) = \cos(x)A(x) - \sin(x)B(x)$$

Les intégrandes des fonctions A et B sont continues et même de classe $\mathcal{C}^1$ donc A et B sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec A' et B' de classe $\mathcal{C}^1$ d'où A, B de classe $\mathcal{C}^2$ et par conséquent

Les fonctions F et G sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$.

Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \quad F''(x) + F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

et avec $\forall x > 0 \quad A'(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad B'(x) = -\frac{\cos(x)}{x}$

on trouve

Les fonctions F et G vérifient $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

3. La fonction $F - G$ est donc solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$ et par conséquent, il existe a, b réels tels que $F - G = a \cos + b \sin$. Or, on a (convergence assurée)

$$\forall x > 0 \quad 0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

et $G(x) = \cos(x)A(x) - \sin(x)B(x)$ avec $A(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ et $B(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$

Par suite $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc la fonction $a \cos + b \sin$ admet une limite en $+\infty$ ce qui prouve $a = b = 0$. Ainsi, on a

$$\forall x > 0 \quad F(x) = G(x)$$

Par continuité de F et G en 0, il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = G(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

Et on conclut

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 4 (****)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}_+^*)$. On pose

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^1 f(t)^x dt$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)^{\frac{1}{x}}$

Corrigé : On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad g(x, t) = f(t)^x = \exp(x \ln(f(t)))$

avec $X = I = [0; 1]$. Montrons que $F \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$.

- Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur I comme fonction continue sur un segment.
- Pour tout $t \in I$, d'après les théorèmes généraux, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur X .
- Soit $x \in X$. La fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \ln(f(t)) \exp(x \ln(f(t)))$ est continue sur I d'après les théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = |\ln(f(t))| \exp(|\ln(f(t))|)$$

La fonction φ est continue donc intégrable sur le segment I . Par régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et $F'(x) = \int_0^1 \ln(f(t)) f(t)^x dt$ pour $x \in [0; 1]$.

Pour $x \in]0; 1]$ $F(x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(F(x))}{x}\right) = \exp\left(\frac{\ln(F(x)) - \ln(F(0))}{x - 0}\right)$

On voit donc apparaître naturellement un taux d'accroissement dans l'expression à étudier. Par conséquent, comme F est dérivable, il vient par continuité de la fonction exponentielle

$$F(x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(F(x)) - \ln(F(0))}{x - 0}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{F'(0)}{F(0)}\right)$$

On conclut

$$F(x)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t)) dt\right)$$

Soit $x > 0$. Avec $f(t) \leq \|f\|_\infty$, on obtient sans difficulté $F(x)^{1/x} \leq \|f\|_\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f , sa borne supérieure sur le segment $[0; 1]$ est atteinte et par conséquent il existe un segment $[a; b] \subset [0; 1]$ avec $b > a$ tel que

$$\forall t \in [a; b] \quad \|f\|_\infty - \varepsilon \leq f(t)$$

d'où
$$\int_a^b (\|f\|_\infty - \varepsilon)^x dt \leq \int_a^b f(t)^x dt \leq F(x)$$

puis
$$(b - a)^{1/x} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \leq F(x)^{1/x}$$

Comme $(b - a)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$, il existe un seuil $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A \quad (b - a)^{1/x} (\|f\|_\infty - \varepsilon) \geq \|f\|_\infty - 2\varepsilon$$

d'où
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 \quad | \quad \forall x \geq A \quad \|f\|_\infty - 2\varepsilon \leq F(x)^{1/x} \leq \|f\|_\infty$$

Ainsi

$$F(x)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty$$

Exercice 5 (***)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que P n'admet pas de racine. On pose

$$\forall (r, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \quad \psi_r(t) = \exp \left(\int_0^t \frac{P'(re^{is})}{P(re^{is})} i re^{is} ds \right)$$

et
$$\forall r \geq 0 \quad F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{is})}{P(re^{is})} re^{is} ds$$

1. Soit $r \geq 0$. Justifier que ψ_r est bien définie, dérivable et déterminer $\psi'_r(t)$ pour t réel.
2. Soit $r \geq 0$. Déterminer une expression simple de $\psi_r(t)$ pour t réel et en déduire que la fonction F est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
3. Justifier que F est continue sur $[0; +\infty[$ puis déterminer $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r)$.
4. Conclure en établissant le théorème de d'Alembert-Gauss.

Corrigé : 1. Comme P n'admet pas de racine, l'intégrande de ψ_r est bien définie, continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction ψ_r est donc bien définie, dérivable avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'_r(t) = \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} i re^{it} \psi_r(t)$$

2. Soit $r \geq 0$. On observe
$$\frac{d}{dt} [P(re^{it})] = i re^{it} P'(re^{it})$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto P(re^{it})$ est solution de l'équation différentielle

$$x' - \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} i re^{it} x = 0$$

On en déduit $\psi_r \in \text{Vect}(t \mapsto P(re^{it}))$. Il en résulte en particulier que ψ_r est périodique d'où $\psi_r(2\pi) = \psi_r(0) = 1$. Ainsi, on a

$$\forall r \geq 0 \quad \exp(2i\pi F(r)) = 1$$

On conclut

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est à valeurs dans } \mathbb{Z}.}$$

3. On pose
$$\forall (r, s) \in [0; +\infty[\times [0; 2\pi] \quad f(r, s) = \frac{P'(re^{is})}{P(re^{is})} re^{is}$$

Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

- Pour $r \geq 0$, on a $f(r, \cdot) \in \mathcal{C}_{pm}([0; 2\pi], \mathbb{R})$.
- Pour $s \in [0; 2\pi]$, on a $f(\cdot, s) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Domination : Soit $a \geq 0$. L'ensemble $[0; a] \times [0; 2\pi]$ est compact comme produit de compacts et la fonction continue $(r, s) \mapsto f(r, s)$ y atteint ses bornes ce qui fournit une domination. Ainsi, la fonction F est continue sur $[0; a]$ pour tout $a \geq 0$ et par conséquent

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^0([0; +\infty[, \mathbb{R})}$$

Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec n entier non nul et $a_n \neq 0$. Pour $r \geq 0$ et s réel, on trouve

$$P(re^{is}) \underset{r \rightarrow +\infty}{=} a_n r^n e^{ins} + o(r^n) \quad \text{et} \quad re^{is} P'(re^{is}) \underset{r \rightarrow +\infty}{=} n a_n r^n e^{ins} + o(r^n)$$

d'où
$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \frac{P'(re^{is})}{P(re^{is})} re^{is} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} n$$

Montrons une domination en vue d'utiliser le théorème de convergence dominée. On pose

$$\forall (r, s) \in [0; +\infty[\times [0; 2\pi] \quad \Delta(r, s) = |f(r, s) - n|$$

Soit $(r, s) \in [0; +\infty[\times [0; 2\pi]$. Par inégalité triangulaire, on trouve

$$\Delta(r, s) = \frac{\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k (k - n) r^k e^{iks} \right|}{\left| \sum_{k=0}^n a_k r^k e^{iks} \right|} \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| (n - k) r^k}{\left| \sum_{k=0}^n a_k r^k e^{iks} \right|}$$

On remarque
$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k e^{iks} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| r^k \underset{r \rightarrow +\infty}{=} o(r^n)$$

Soit $\varepsilon \in]0; 1[$. On dispose d'un seuil $R \geq 0$, indépendant de s puisque le membre de droite dans l'inégalité ne dépend plus que de r , tel que

$$\forall r \geq R \quad \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k e^{iks} \right| \leq \varepsilon |a_n| r^n$$

Ainsi
$$|a_n r^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k e^{iks} \right| \geq |a_n| r^n (1 - \varepsilon)$$

Et par inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k r^k e^{iks} \right| = \left| a_n r^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k e^{iks} \right| \geq \left| |a_n r^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k e^{iks} \right| \right| \geq |a_n| r^n (1 - \varepsilon)$$

Il vient
$$\Delta(r, s) \leq \frac{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| (n - k) r^k}{|a_n| r^n (1 - \varepsilon)} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, on dispose d'un seuil $R' \geq R$, indépendant de s puisque le membre de droite dans l'inégalité ne dépend plus que de r , tel que

$$\forall r \geq R' \quad \Delta(r, s) \leq 1$$

Toujours par inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall (r, s) \in [R'; +\infty[\times [0; 2\pi] \quad |f(r, s)| \leq \Delta(r, s) + n \leq n + 1$$

Et par convergence dominée
$$\boxed{F(r) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n \, ds = n}$$

4. On a établi précédemment que la fonction F est constante d'où $F(r) = n$ pour tout $r \geq 0$. Or, on a clairement $F(0) = 0$ ce qui est contradictoire puisque $n \geq 1$. L'hypothèse faite sur P est donc fausse et on conclut avec le théorème de d'Alembert-Gauss

$$\boxed{\text{Tout polynôme non constant de } \mathbb{C}[X] \text{ admet une racine.}}$$