

Feuille d'exercices n°04

Exercice 1 (*)

On pose $\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 2 (*)

Pour x réel, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F' + G'$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 3 (*)

On pose $\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ et $\Lambda = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

1. Justifier que F est bien définie, continue sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$. On pourra chercher à exprimer $F(x)$ en fonction de Λ pour $x > 0$.

Exercice 4 (**)

Pour x réel, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt$

1. Établir que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que F est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire une expression de $F(x)$ pour x réel.

On admettra l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 5 (**)

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} e^{-xt} dt$

1. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
3. En déduire une expression de $F(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 6 (**)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt$$

1. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour x réel, calculer $F''(x)$ puis $F'(x)$.
3. En déduire une expression de $F(x)$ pour x réel.

Exercice 7 (**)

À l'aide d'une intégrale à paramètre, établir que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.