

Feuille d'exercices n°05

Exercice 1 (**)

On pose $\forall x > -1 \quad F(x) = \int_0^{t^x - 1} \frac{1}{\ln(t)} dt$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1 ; +\infty [$.
2. En déduire une expression de $F(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 2 (**)

On pose $\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x \sin(t)^2) dt$

1. Justifier que F est bien définie et continue sur $[0 ; +\infty [$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0 ; +\infty [$.
3. Préciser une expression de $F'(x)$ avec $x \geq 0$ à l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$.
4. Conclure que $\forall x \geq 0 \quad F(x) = \pi [\ln(1 + \sqrt{1+x}) - \ln(2)]$

Exercice 3 (***)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \exp \left[- \left(t^2 + \frac{x^2}{t^2} \right) \right] dt$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0 ; +\infty [$.
3. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]0 ; +\infty [$.
4. En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (***)

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 1$ puis montrer que l'expression vaut aussi pour $x = 1$.
3. En déduire une expression simple de $F(x)$.

4. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)^2}{t^2} dt$

Exercice 5 (***)

Pour $x > 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x} dt$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.
3. Déterminer des équivalents de F en 0^+ et en $+\infty$.

Exercice 6 (****)

On pose
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que F est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la dérivabilité de F en zéro.