

Feuille d'exercices n°06

Exercice 1 (**)

Soient $a, b > 0$.

1. Justifier l'existence pour x réel de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$$

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer F' .
3. En déduire une expression de $F(x)$ pour x réel.

Indications : 3. Considérer $\varphi : t > 0 \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ et utiliser l'idée du lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 2 (**)

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Arctan}(x \tan(t))}{\tan(t)} dt$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une expression simple de $F(x)$ pour x réel.
3. En déduire $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\tan(t)} dt = \frac{\pi}{2} \ln(2)$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$

Indications : 2. Restreindre l'étude à $\mathbb{R}_+$ en observant l'impairité de F . Effectuer le changement de variables $u = \tan(t)$ dans F' puis réaliser une décomposition en éléments simples pour $x \neq 1$. On pourra poser $v = u^2$ momentanément. En déduire une expression de F' et justifier sa validité en $x = 1$.

3. Pour la deuxième intégrale, intégrer par parties.

Exercice 3 (****)

On pose $\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$

1. Montrer que F et G sont définies, continues sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et qu'elles sont toutes deux solutions de l'équation

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

3. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Indications : 1. Intégrer par parties pour G .

2. Utiliser le changement de variable $u = x + t$ dans $G(x)$.
3. Déterminer la forme de $F - G$ puis la limite de F et G en $+\infty$. Conclure à l'aide de la première question.

Exercice 4 (****)

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{R}_+^*)$. On pose

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^1 f(t)^x dt$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)^{\frac{1}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)^{\frac{1}{x}}$

Indications : Pour la limite en 0^+ , observer que pour $x > 0$

$$F(x)^{\frac{1}{x}} = \exp \left[\frac{\ln(F(x)) - \ln(F(0))}{x - 0} \right]$$

Pour la limite en $+\infty$, comparer $F(x)^{\frac{1}{x}}$ à $\|f\|_\infty$.

Exercice 5 (***)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que P n'admet pas de racine. On pose

$$\forall (r, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \quad \psi_r(t) = \exp \left(\int_0^t \frac{P'(re^{is})}{P(re^{is})} i re^{is} ds \right)$$

et
$$\forall r \geq 0 \quad F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{P'(re^{is})}{P(re^{is})} re^{is} ds$$

1. Soit $r \geq 0$. Justifier que ψ_r est bien définie, dérivable et déterminer $\psi_r'(t)$ pour t réel.
2. Soit $r \geq 0$. Déterminer une expression simple de $\psi_r(t)$ pour t réel et en déduire que la fonction F est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
3. Justifier que F est continue sur $[0; +\infty[$ puis déterminer $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r)$.
4. Conclure en établissant le théorème de d'Alembert-Gauss.

Indications : 2. Déterminer une équation différentielle dont ψ_r est solution. En déduire que ψ_r périodique puis conclure sur F .

3. Procéder par domination locale pour la continuité sous l'intégrale. Avec $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $a_n \neq 0$, procéder par convergence dominée pour $\lim_{r \rightarrow +\infty} F(r) - n$ avec une domination élaborée par une utilisation multiple de l'inégalité triangulaire (directe et aussi inverse).