TP 1 : Mesures électriques et incertitudes (thème électrocinétique)

1 Incertitude sur une mesure

1.1 Mesure d'une résistance

1.1.1 incertitude « constructeur »

1. La tolérance étant $t = 5\%$, on en déduit l'incertitude maximale $\Delta_c(R) = R \times t = 50\,\Omega$. En supposant la loi de probabilité uniforme, on en déduit l'incertitude-type

$$\boxed{u_c(R) = \frac{\Delta_c(R)}{\sqrt{3}} = 29\,\Omega}$$

1.1.2 Incertitude d'une mesure à l'ohmètre

Avec le calibre $2\,\text{k}\Omega$ on mesure $R_{ohm} = 1003\,\Omega$. D'après la notice $(\pm 0,8\% + 1\,\Omega)$, on en déduit

$$\Delta_{ohm}(R) = \frac{0,8}{100} \times 1003 + 1 = 9,0\,\Omega \quad \text{et} \quad u_{ohm}(R) = \frac{\Delta_{ohm}(R)}{\sqrt{3}} = 5,2\,\Omega$$

On a donc $\boxed{R_{ohm} = 1003,0\,\Omega \quad (u_{ohm}(R) = 5,2\,\Omega)}$.

1.1.3 Vérifier la compatibilité des deux mesures

On calcule l'écart normalisé

$$\boxed{EN = \frac{|R - R_{ohm}|}{\sqrt{u_c(R)^2 + u_{ohm}(R)^2}} = 0,1}$$

Comme on a $EN < 2$, on en déduit que la mesure effectuée à l'ohmètre est compatible avec les données constructeurs.

1.2 Mesure d'une tension

1.2.1 Au voltmètre

On branche directement le voltmètre sur le GBF et on lit $U_v = 3,50\,\text{V}$ avec le calibre $20\,\text{V}$. D'après la notice du voltmètre $(\pm 0,8\% + 30\,\text{mV})$, on en déduit l'incertitude maximale, puis l'incertitude-type :

$$\Delta(U_v) = 0,058\,\text{V} \quad \text{et} \quad u(U_v) = 0,033\,\text{V}$$

La mesure donne $\boxed{U_v = 3,500\,\text{V} \quad (u(U_v) = 0,033\,\text{V})}$.

1.2.2 À l'oscilloscope

On utilise les mesures automatiques de l'oscilloscope. On mesure $U_o = 3,57\,\text{V}$. Cette mesure est précise à 3%, donc

$$\Delta(U_o) = 0,11\,\text{V} \quad \text{et} \quad u(U_o) = 0,062\,\text{V}$$

Le mesure donne $\boxed{U_o = 3,570\,\text{V} \quad (u(U_o) = 0,062\,\text{V})}$.

On calcule l'écart-normalisé

$$\boxed{EN = \frac{3.57 - 3.5}{\sqrt{0.033^2 + 0.062^2}} = 1}$$

On a $EN < 2$, donc les mesures faites au voltmètre et à l'oscilloscope sont compatibles.

On reprend les mesures et incertitudes avec la fréquence $f = 20\,\text{kHz}$:

$$U_v = 6,060\,\text{V} \quad (u(U_v) = 0,045\,\text{V}) \quad \text{et} \quad U_o = 3,630\,\text{V} \quad (u(U_o) = 0,063\,\text{V})$$

$$\text{soit} \quad EN = 31 > 2$$

On constate qu'à cette fréquence les mesures ne sont pas compatibles. La mesure au voltmètre est fortement affectée par l'augmentation de la fréquence. Celui-ci ne fonctionne pas correctement au-delà de $1\,\text{kHz}$.

On retiendra que pour des fréquences plus grandes, il faut utiliser l'oscilloscope pour effectuer des mesures.

2 Incertitude sur une grandeur résultant de plusieurs mesures

2.1 Incertitude sur une somme : association de résistances

On branche l'ohmètre aux bornes de l'association en série et on mesure

$$R_t = 7,80\,\text{k}\Omega \quad \text{avec} \quad u(R') = \frac{0.008 \times 7,8 + 0,01}{\sqrt{3}} = 0,042\,\text{k}\Omega$$

On en déduit la mesure de R' :

$$R' = R_t - R = 6,817\,\text{k}\Omega \quad \text{et} \quad u(R') = \sqrt{u(R)^2 + u(R_t)^2} = 0,042\,\text{k}\Omega$$

On présente correctement le résultat

$$\boxed{R' = 6,817\,\text{k}\Omega \quad (u(R') = 0,042\,\text{k}\Omega)}$$

2.2 Incertitude sur une fonction quelconque : Mesure de la capacité à partir du déphasage

2.2.1 Principe

2. En appliquant un pont diviseur de tension du circuit passé en complexe :

$$\underline{u_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}\,\underline{u_2} = \frac{1}{1 - j\frac{1}{RC\omega}}\,\underline{u_2}$$

Or par définition $\phi = \arg(\underline{u_1}) - \arg(\underline{u_2})$, donc

$$\phi = \arg\left(\frac{\underline{u_1}}{\underline{u_2}}\right) = \arg\left(\frac{1}{1 - j\frac{1}{RC\omega}}\right) = -\arg\left(1 - j\frac{1}{RC\omega}\right)$$

On en déduit

$$\phi = \arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right) \quad \text{donc} \quad \boxed{C = \frac{1}{R\omega\tan(\phi)} = \frac{\text{cotan}(\phi)}{2\pi Rf}}$$

2.2.2 Mesures et analyses

On réalise le circuit, et en moyennant pour limiter les fluctuations de la phase entre 70,7 ° et 72,7 °. On en déduit

$$\phi = 71{,}7\ ^\circ \quad \text{et} \quad \Delta(\phi) = 1\ ^\circ$$

On calcule alors la valeur de la capacité :

$$C = 1{,}05 \times 10^{-8}\,\text{F}$$

Pour déterminer l'incertitude-type sur C, on effectue une simulation Monte Carlo. On présente alors le résultat final

$$\boxed{C = 1{,}050 \times 10^{-8}\,\text{F} \quad (u(C) = 0{,}036 \times 10^{-8}\,\text{F})}$$

2.3 Incertitude sur un produit : Mesure d'une capacité par un temps de décharge

3. En posant u_c la tension aux bornes du condensateur et en appliquant la loi des mailles (avec $u_2 = +E$) et la lois de fonctionnement de la résistance et du condensateur, on a

$$i = C\frac{\text{d}u_c}{\text{d}t} \quad \text{et} \quad u_c = E - u_1 \quad \text{et} \quad u_1 = Ri$$

On en déduit l'équation différentielle

$$u_1 = RC\frac{\text{d}u_c}{\text{d}t} = RC\frac{\text{d}(E - u_1)}{\text{d}t} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\text{d}u_1}{\text{d}t} + \frac{1}{RC}\,u_1(t) = 0}$$

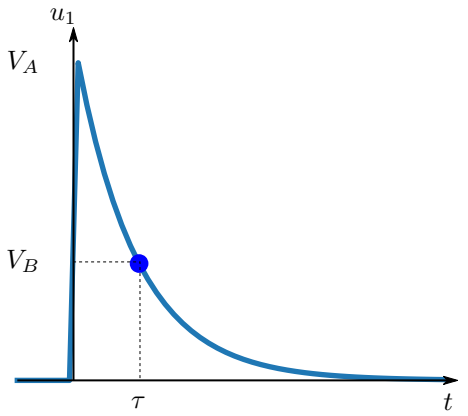
On pose alors la constante de temps $\boxed{\tau = RC}$.
Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_c(t = 0^+) = u_c(t = 0^-)$. Or la période du signal délivré par le GBF étant suffisamment grande devant τ, le régime permanent est atteint à $t = 0^-$, donc $u_c(t = 0^-) = u_2(t = 0^-) = -E$.
On en déduit

$$u_c(t = 0^+) = -E \quad \text{et} \quad u_1(t = 0^+) = u_2(t = 0^+) - u_c(t = 0^+) = E - (-E) = 2E$$

La résolution de l'équation différentielle avec cette condition initiale donne

$$\boxed{u_1(t) = 2E\exp(-t/\tau)}$$

Ainsi $\boxed{V_A = 2E = 10\,\text{V}}$ et $\boxed{V_B = V_A \times 0{,}37 = 3{,}7\,\text{V}}$.



On place le premier curseur au début du régime transitoire $t_A = 400\,\text{ns}$ et $V_A = 9{,}20\,\text{V}$. Avec le calibre choisi, l'intervalle d'échantillonnage vaut $\Delta t = 0{,}4\,\mu\text{s}$. D'après la notice, l'incertitude maximale vaut

$$\Delta(t_A) = \Delta t + \frac{100}{10^6} \times t_A + 0{,}6\,\text{ns} \approx \Delta t$$

On va positionner le second curseur de telle sorte à avoir $V_B = 0,37V_A = 3{,}4\,\text{V}$. Avec les fluctuations des mesures, on mesure $t_B = 10{,}8\,\mu\text{s}$ avec comme incertitude 2 fois l'intervalle d'échantillonnage soit $\Delta(t_B) \approx 0{,}8\,\mu\text{s}$ (les autres termes sont négligeables).

On calcule la constante de temps

$$\tau = t_B - t_A = 10{,}4\,\mu\text{s} \quad \text{u} \quad (\tau) = \sqrt{u(t_B)^2 + u(t_A)^2} = \frac{\sqrt{0.8^2 + 0.4^2}}{\sqrt{3}} = 0{,}52\,\mu\text{s}$$

Comme $\tau = RC$ avec $R = 1003\,\Omega$ et $u(R) = 5{,}2\,\Omega$, on en déduit

$$C = \frac{\tau}{R} = 1{,}037 \times 10^{-8}\,\text{F} \quad \text{et} \quad u(C) = C\sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(\frac{u(\tau)}{\tau}\right)^2} = 0{,}052 \times 10^{-8}\,\text{F}$$

On présente correctement le résultat

$$\boxed{C = 1{,}037 \times 10^{-8}\,\text{F} \quad (u(C) = 0{,}052 \times 10^{-8}\,\text{F})}$$

On calcule un écart normalisé avec la mesure précédente

$$EN = \frac{1.050 - 1.037}{\sqrt{0.036^2 + 0.052^2}} = 0,2$$

On a un écart normalisé inférieur 2, donc les deux mesures de la capacité sont compatibles.