

## Feuille d'exercices n°01

### Exercice 1 (\*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$$

$$3. \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$$

$$5. \int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{1}{t})} dt$$

$$2. \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}}$$

$$4. \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$$

$$6. \int_0^1 \frac{dt}{\ln(t)}$$

**Corrigé :** 1. On a  $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2} \in \mathcal{C}_{pm}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$  et  $\frac{\sin(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t} \geq 0$ . D'après le critère des équivalents (licite, signe constant au voisinage de 0) et le critère de Riemann, l'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt$  diverge et par conséquent

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$  diverge.

2. On a  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}} \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1[, \mathbb{R})$  et  $\frac{1}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t^2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t} \geq 0$ . D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on obtient que

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}}$  diverge.

3. On a  $f : t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)} \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1[, \mathbb{R})$  puis

$$\frac{t-1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{t-1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{t-1}{t-1} \underset{t \rightarrow 1}{\longrightarrow} 1$$

La fonction est donc prolongeable par continuité en 0 et 1 donc intégrable en 0 et 1 (faussement impropre). Ainsi

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$  converge.

4. On a  $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1[, \mathbb{R})$  puis

$$\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction  $f$  est intégrable en 0 et 1. Ainsi

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$  converge.

5. On a  $f : t \mapsto e^{-(t+\frac{1}{t})} \in \mathcal{C}_{pm}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$  puis

$$\forall t > 0 \quad 0 \leq f(t) \leq e^{-t}$$

Par comparaison de fonctions positives

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{1}{t})} dt \text{ converge.}}$$

**Variante :** On a  $e^{-(t+\frac{1}{t})} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$  et  $e^{-(t+\frac{1}{t})} = \underbrace{e^{-\frac{1}{t}}}_{=O(1)} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

La fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable en 0 (faussement impropre) et intégrable en  $+\infty$  par comparaison et critère de Riemann.

6. On a  $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)} \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1[, \mathbb{R})$  et  $\frac{1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{t-1} \leq 0$ . D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on conclut que

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{dt}{\ln(t)} \text{ diverge.}}$$

## Exercice 2 (\*\*)

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt & 3. \int_0^1 \frac{\sqrt[5]{t} - 1}{\ln(t)} dt & 5. \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)} \\ 2. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos(t)} & 4. \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt & 6. \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t) - \cos(t)}{t^2} dt \end{array}$$

**Corrigé :** 1. On a  $f : t \mapsto 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \in \mathcal{C}_{pm}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$  puis

$$1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1) \quad \text{et} \quad 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction  $f$  est intégrable en 0 par comparaison et intégrable en  $+\infty$  par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt \text{ converge.}}$$

2. On a  $f : t \mapsto \frac{1}{\cos(t)} \in \mathcal{C}_{pm}\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$  et

$$\frac{1}{\cos(t)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} \underset{t \rightarrow \frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - t} \geq 0$$

D'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et le critère de Riemann, on conclut que

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos(t)} \text{ diverge.}}$$

3. On a  $f : t \mapsto \frac{\sqrt[5]{t} - 1}{\ln(t)} \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1[, \mathbb{R})$  puis

$$\frac{\sqrt[5]{t}-1}{\ln(t)} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt[5]{t}-1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{5} \frac{t-1}{t-1} \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} \frac{1}{5}$$

La fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0 et 1 donc intégrable en 0 et 1 et par conséquent

L'intégrale  $\int_0^1 \frac{\sqrt[5]{t}-1}{\ln(t)} dt$  converge.

4. On a  $f : t \mapsto \ln(1 - e^{-t}) \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[; \mathbb{R})$  puis

$$\ln(1 - e^{-t}) \underset{t \rightarrow 0}{=} \ln(1 - 1 + t + o(t)) = \ln(t(1 + o(1))) = \ln t + \ln(1 + o(1)) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

et 
$$\ln(1 - e^{-t}) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, la fonction  $f$  est intégrable en 0 et  $+\infty$  et par conséquent

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt$  converge.

5. Pour  $x \geq e$ , on a

$$\int_e^x \frac{dt}{t \ln(t)} = [\ln(\ln(t))]_e^x = \ln(\ln(x)) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Ainsi

L'intégrale  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)}$  diverge.

6. On a  $f : t \mapsto \frac{\cos(2t) - \cos(t)}{t^2} \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[; \mathbb{R})$  puis

$$\frac{\cos(2t) - \cos(t)}{t^2} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\cos(2t) - \cos(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction  $f$  est prolongeable par continuité en 0 donc intégrable en 0 et intégrable en  $+\infty$  par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t) - \cos(t)}{t^2} dt$  converge.

### Exercice 3 (\*)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2}$

2.  $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1}$

3.  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + \ln(t)^2)}$

**Corrigé :** 1. Avec le changement de variables  $u = \ln(t)$ , l'intégrale  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2}$  est de même

nature que  $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$  qui converge et par conséquent

L'intégrale  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2}$  converge et vaut  $\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2} = 1$ .

**Variante :** On peut observer

$$\int^x \frac{dt}{t \ln(t)^2} = \left[ -\frac{1}{\ln(x)} \right] \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\ln(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que le crochet  $\left[ -\frac{1}{\ln(t)} \right]_e^{+\infty}$  est fini d'où la convergence de  $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln(t))^2}$  qui vaut  $\left[ -\frac{1}{\ln(t)} \right]_e^{+\infty} = 1$ .

2. On a  $t \mapsto \frac{1}{t^2 - 1} \in \mathcal{C}_{pm}([2; +\infty[, \mathbb{R})$  et  $\frac{1}{t^2 - 1} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$  d'où l'intégrabilité de la fonction.

Puis

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} = \int_2^{+\infty} \frac{1}{2} \left[ \frac{t+1 - (t-1)}{(t+1)(t-1)} \right] dt = \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} \left[ \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right] dt = \frac{1}{2} \left[ \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \right]_2^{+\infty}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} \text{ converge et vaut } \frac{\ln(3)}{2}}$$

3. L'intégrande est continue par morceaux sur  $[1; +\infty[$ . On observe :

$$\int^x \frac{dt}{t(1 + \ln(t)^2)} = [\text{Arctan}(\ln(x))] \quad \text{et} \quad \text{Arctan}(\ln(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que le crochet  $[\text{Arctan}(\ln(t))]_1^{+\infty}$  est fini et par suite

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1 + \ln(t)^2)} \text{ converge et vaut } [\text{Arctan}(\ln(t))]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

**Remarque :** On peut aussi procéder au changement de variables  $u = \ln(t)$ .

## Exercice 4 (\*\*)

On pose  $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} dt$

1. Justifier que  $I_n$  est bien définie pour tout  $n$  entier.
2. Pour  $n$  entier non nul, déterminer une relation entre  $I_n$  et  $I_{n-1}$ .
3. En déduire une expression de  $I_n$  pour tout  $n$  entier.

**Corrigé :** 1. Soit  $n$  entier. On pose

$$\forall t \in [0; 1[ \quad f_n(t) = \frac{t^n}{\sqrt{1-t}}$$

On a  $f \in \mathcal{C}_{pm}([0; 1[, \mathbb{R})$  et  $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$  d'où l'intégrabilité de  $f$  sur  $[0; 1[$ . Ainsi

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ entier, l'intégrale définissant } I_n \text{ est convergente.}}$$

2. Soit  $n$  entier non nul. Les fonctions  $t \mapsto t^n$  et  $t \mapsto -2\sqrt{1-t}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1[$  et le crochet  $[-2t^n\sqrt{1-t}]_0^1$  est clairement fini. En intégrant par parties, les intégrales  $\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} dt$  et  $\int_0^1 2nt^{n-1}\sqrt{1-t} dt$  sont de même nature donc convergentes et on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} dt &= \underbrace{\left[-2t^n\sqrt{1-t}\right]_0^1}_{=0} + 2n \int_0^1 t^{n-1}\sqrt{1-t} dt \\ &= 2n \int_0^1 t^{n-1} \frac{1-t}{\sqrt{1-t}} dt = 2nI_{n-1} - 2nI_n\end{aligned}$$

la dernière égalité ayant lieu par linéarité de l'intégrale car convergence. Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}}$$

3. Par récurrence, on trouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = I_0 \prod_{k=1}^n \left( \frac{2k}{2k+1} \right) \quad \text{et} \quad I_0 = 2$$

En complétant le dénominateur par le produit des entiers pairs, il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = 2 \prod_{k=1}^n \left( \frac{(2k)^2}{(2k)(2k+1)} \right) = 2^{2n+1} \frac{\prod_{k=1}^n k^2}{(2n+1)!}$$

On conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}}$$

## Exercice 5 (\*\*)

Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \qquad 2. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \qquad 3. \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t} dt$$

**Corrigé :** 1. On a  $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2} \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$  et  $\frac{1}{(1+t^2)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^4}\right)$ . Puis, on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} &= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \right] dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt\end{aligned}$$

par linéarité car convergence des intégrales concernées. Pour cette dernière, les fonctions  $t \mapsto t$  et  $t \mapsto -\frac{1}{1+t^2}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; +\infty[$  avec

$$-\frac{t}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{t}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \left[ -\frac{t}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

Finalement

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \text{ converge et vaut } \frac{\pi}{4}.}$$

**Variante :** L'intégrande étant continue, on peut aussi utiliser le changement de variables  $t = \tan(u) = \varphi(u)$  avec  $\varphi : \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow ] 0; +\infty[, u \mapsto \tan(u)$  bijective, de classe  $\mathcal{C}^1$  et strictement croissante. Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\tan(u)^2}{(1+\tan(u)^2)^2} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 du$$

sont de même nature donc convergentes et égales. Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2 du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2} du = \frac{\pi}{4}$$

2. On a  $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2} \in \mathcal{C}([0; +\infty[, \mathbb{R})$  avec

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Ainsi, par comparaison et critère de Riemann, la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0; 1]$  et  $[1; +\infty[$ . Avec le changement de variables  $t = \frac{1}{u}$  (de classe  $\mathcal{C}^1$ , bijectif de  $]0; +\infty[$  sur  $]0; +\infty[$  et strictement décroissant), les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+\frac{1}{u^2}} \frac{du}{u^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du$$

sont de même nature donc convergentes et égales. On en déduit

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$  converge et est nulle.

3. On a  $f : t \mapsto e^{-(1-i)t} \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{C})$  avec

$$|f(t)| = e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison et critère de Riemann, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} dt$  converge absolument et par conséquent  $\int_0^{+\infty} \operatorname{Im} e^{-(1-i)t} dt$  converge absolument et on a

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t} dt = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{-(1-i)t} dt = \operatorname{Im} \left[ -\frac{e^{-(1-i)t}}{1-i} \right]_0^{+\infty} = \operatorname{Im} \frac{1}{1-i}$$

Ainsi

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t} dt$  converge et vaut  $\frac{1}{2}$ .

## Exercice 6 (\*\*)

On pose  $\forall a > 0 \quad I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt$

1. Justifier que  $I(a)$  est bien définie pour tout  $a > 0$ .
2. Calculer  $I(1)$ .
3. En déduire la valeur de  $I(a)$  pour tout  $a > 0$ .

**Corrigé :** 1. Soit  $a > 0$ . Notons  $f(t) = \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2}$  pour  $t > 0$ . On a  $f \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$  puis, par croissances comparées, on obtient  $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$  et

$$t^{\frac{3}{2}}f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

d'où  $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ . Par comparaison et critère de Riemann, la fonction  $f$  est intégrable sur  $]0;1]$  et  $[1;+\infty[$  d'où

L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt$  converge pour tout  $a > 0$ .

2. L'intégrande  $f$  est continue. Avec le changement  $t = 1/u$ , les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{-\ln(u)}{1+u^2} du$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. On en déduit

$I(1) = 0$

**Variante :** Le changement  $u = \ln(t)$  permet également de conclure avec l'intégrale d'une fonction impaire sur un domaine centré en zéro.

3. Soit  $a > 0$ . Avec le changement de variable  $t = au$ , les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt \quad \text{et} \quad a \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u) + \ln(a)}{a^2(1+u^2)} du$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. L'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = [\text{Arctan}(u)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$  converge et par linéarité de l'intégrale en cas de convergence, il vient

$$I(a) = \frac{1}{a} \left[ I(1) + \frac{\pi}{2} \ln(a) \right]$$

On conclut

$\forall a > 0 \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt = \frac{\pi \ln(a)}{2a}$

## Exercice 7 (\*\*)

1. Calculer  $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4}$ .

2. Établir  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$

3. En déduire  $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$  puis  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} dt$ .

**Corrigé :** 1. Par changement de variables avec  $u = t^2$ , les intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4}$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)}$  sont de même nature et  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \left[ \frac{\text{Arctan}(t)}{2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}$  d'où la convergence et la valeur avec

$\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{4}$

2. Avec le changement de variables  $u = \frac{1}{t}$ , on obtient l'égalité attendue par convergence des intégrales concernées

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}}$$

3. On pose  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$  et  $J = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4} dt$

On a  $\forall t \in \mathbb{R} \quad t^4 + 1 = (t^2 + 1)^2 - 2t^2 = (t^2 + t\sqrt{2} + 1)(t^2 - t\sqrt{2} + 1)$

Ainsi, par linéarité car convergence, il vient

$$2I + \sqrt{2}J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^4 + 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t\sqrt{2} - 1)^2 + 1} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$$

Ainsi 
$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi\sqrt{2}}{4} - \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Puis, on considère  $\varphi : \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \left] 0; +\infty \right[, t \mapsto \sqrt{\tan(t)}$  application de classe  $\mathcal{C}^1$ , strictement croissante, bijective de  $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  sur  $\left] 0; +\infty \right[$ . D'après le théorème de changement de variables, les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4} du$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. On conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(t)} dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}}$$

## Exercice 8 (\*\*)

Montrer 
$$\int_0^x \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$$

**Corrigé :** On a  $f : \left] 0; +\infty \right[ \mapsto \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) \in \mathcal{C}_{pm}(\left] 0; +\infty \right[, \mathbb{R})$  puis

$$\operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) \underset{t \rightarrow 0^+}{=} O(1) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t} \geq 0$$

La fonction  $f$  est intégrable en 0 par comparaison (et même faussement impropre) mais l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$  diverge d'après le critère des équivalents (licite, signe constant) et critère de Riemann. Par intégration des relations de comparaison (à une fonction positive), on trouve

$$\int_1^x \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x)$$

On a  $\int_0^1 \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) dt = o(\ln(x))$  puisque  $\ln(x) \rightarrow +\infty$  pour  $x \rightarrow +\infty$  et par conséquent

$$\int_0^x \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) dt = \int_0^1 \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) dt + \int_1^x \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) dt = \ln(x) + o(\ln(x))$$

On conclut

$$\boxed{\int_0^x \operatorname{Arctan} \left( \frac{1}{t} \right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)}$$

**Remarque :** Un calcul explicite est possible en intégrant par parties (et éventuellement aussi la relation fondamentale de Arctan).

### Exercice 9 (\*)

Déterminer un équivalent simple pour  $x \rightarrow +\infty$  de  $\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3} dt$ .

**Corrigé :** On a  $t \mapsto \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3} \in \mathcal{C}_{pm}([1; +\infty[, \mathbb{R})$  et

$$\frac{\operatorname{th}(t)}{t^3} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$$

Par comparaison et critère de Riemann, l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3} dt$  converge absolument et par intégration des relations de comparaison (à une fonction positive), on a

$$\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \left[ -\frac{1}{2t^2} \right]_x^{+\infty}$$

Ainsi

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{th}(t)}{t^3} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}}$$