

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES

B. Landelle

Table des matières

I	Intégrale généralisée	3
1	Définitions	3
2	Premières propriétés	6
3	Exemples fondamentaux	8
4	Comparaison pour des fonctions positives	9
II	Fonctions intégrables	13
1	Intégrabilité	13
2	Propriétés fondamentales	14
3	Théorèmes de comparaison	16
4	Intégration des relations de comparaison	16
III	Transformations d'intégrales	19
1	Théorème de changement de variable	19
2	Intégration par parties	21
IV	Fonctions définies par une intégrale	22
1	Convergence dominée	22
2	Continuité sous l'intégrale	23
3	Régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale	24
4	Régularité $\mathcal{C}^k$ sous l'intégrale	25

Dans tout ce chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et l'ensemble I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

Rappels et compléments

Les notions de continuité et d'uniforme continuité vues en MPSI s'étendent à l'identique pour une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ avec $D \subset \mathbb{K}$. Ainsi, la fonction f est continue en $a \in D$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad | \quad \forall x \in D \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

et la fonction f est uniformément continue sur D si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad | \quad \forall (x, y) \in D^2 \quad |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Définition 1. Soit $f \in \mathcal{F}([a; b], \mathbb{K})$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i \in [0; n]}$, i.e. $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [0; n - 1]$, la fonction f est continue sur $]a_i; a_{i+1}[$ et admet des limites finies en a_i^+ et a_{i+1}^- .

Notations : On note $\mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$.

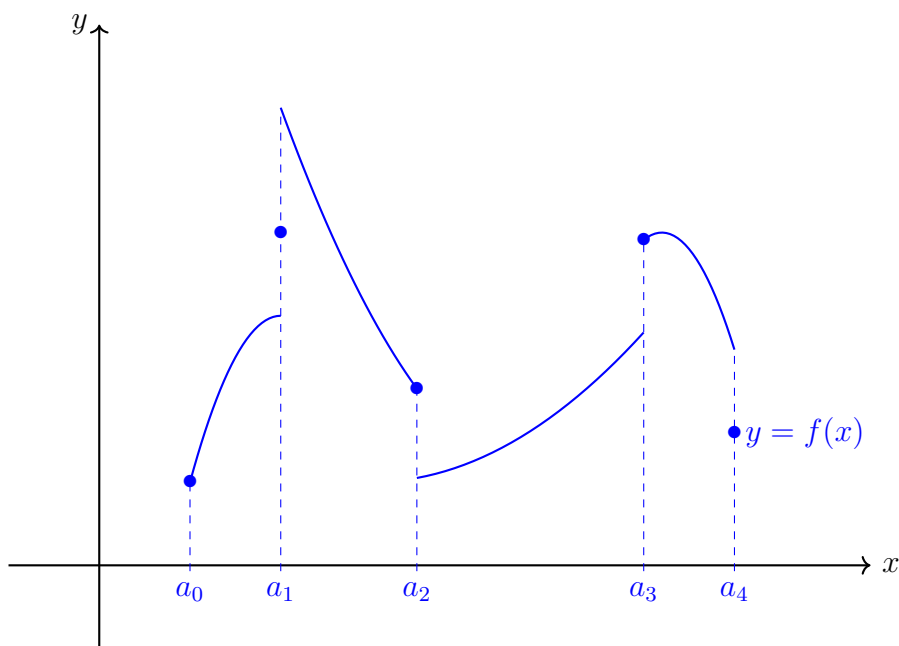


FIGURE 1 – Graphe d'une fonction continue par morceaux

Vocabulaire : Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{K})$, une subdivision σ vérifiant la propriété décrite dans la définition 1 est dite *adaptée* à f . Il n'y pas unicité d'une telle subdivision : si σ est adaptée et σ sous-suite de σ' (on dit que σ' est plus fine que σ), alors σ' est adaptée.

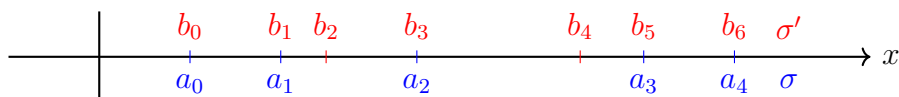


FIGURE 2 – Subdivisions adaptées

Définition 2. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On dit que f est continue par morceaux sur I si, pour tout segment $[a; b] \subset I$, on a $f|_{[a; b]} \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{K})$.

Notations : On note $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I . Cet ensemble est un $\mathbb{K}$ -ev.

Exemples : 1. $[\cdot] \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. On pose $\forall t \in [0; 1] \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{t} & \text{sinon} \end{cases}$

On a $f \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1], \mathbb{R})$ et $f \notin \mathcal{C}_{pm}([0; 1], \mathbb{R})$

I Intégrale généralisée

1 Définitions

Définition 3. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b[, \mathbb{K})$ avec $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge (ou est convergente) si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers b et dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ diverge (ou est divergente).

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a; b], \mathbb{K})$ avec $a \in]-\infty; b[\cup \{-\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge (ou est convergente) si $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers a et dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ diverge (ou est divergente).

Vocabulaire : L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ notée aussi $\int_a^b f$ est dite intégrale *généralisée* ou *impropre* de f sur $[a; b[$, respectivement $]a; b]$. Deux intégrales sont dites de même nature si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes.

 **Consigne importante :** Lors de l'étude d'une intégrale généralisée, on commence systématiquement par préciser la continuité par morceaux de l'intégrande sur l'intervalle concerné.

Remarque : Pour une intégrale divergente, $\int_a^b f(t) dt$ n'est qu'une notation. Ce n'est pas un élément de $\mathbb{K}$.

- Exemples :** 1. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$: pour $x \geq 1$, on a $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. $\int_0^1 \frac{dt}{t}$: pour $x \in]0; 1]$, on a $\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.
3. $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$: pour $x \geq 0$, on a $\int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.
4. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$: pour $x \in]0; 1]$, on a $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(1 - \sqrt{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2$.
5. $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$: pour n entier, on a $\int_0^{n\pi} \sin(t) dt = 1 - (-1)^n$ et $n\pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ ce qui prouve l'absence de limite.

Proposition 1. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b[, \mathbb{K})$ avec $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ et $c \in [a; b[$ (respectivement $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a; b], \mathbb{K})$ avec $a \in]-\infty; b[\cup \{-\infty\}$ et $c \in]a; b]$). Alors, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ (respectivement $\int_a^b$ et $\int_a^c$) sont de même nature. En cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b[, \mathbb{K})$ et $c \in [a; b[$. La relation de Chasles usuelle donne

$$\forall x \in [a; b[\quad \int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt$$

Par suite, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie pour $x \rightarrow b$ si et seulement si $x \mapsto \int_c^x f(t) dt$ admet une limite finie pour $x \rightarrow b$. En cas de convergence, faisant tendre $x \rightarrow b$, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \lim_{x \rightarrow b} \int_c^x f(t) dt$$

ce qui prouve le résultat attendu. $\square$

Remarque : Ce résultat dit notamment que la nature d'une intégrale généralisée sur un intervalle semi-fermé est indépendante du choix de la borne fermée.

Définition 4. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a; b[, \mathbb{K})$ avec $a < b$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge (ou est convergente) si il existe $c \in]a; b[$ tel que $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

S'il existe $d \in]a; b[$ tel que $\int_a^d f(t) dt$ ou $\int_d^b f(t) dt$ diverge, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ diverge (ou est divergente).

Vocabulaire : L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ notée aussi $\int_a^b f$ est appelée intégrale généralisée ou impropre de f sur $]a; b[$.

Remarque : S'il existe $c \in]a; b[$ tel que $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ converge, alors d'après la proposition 1, on a

$$\forall d \in]a; b[\quad \int_a^d f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_d^b f(t) dt \text{ convergent}$$

Par négation de cette assertion, on retrouve bien la définition d'une intégrale sur $]a; b[$ divergente. Puis, pour $d \in]a; b[$

$$\int_a^d + \int_d^b = \begin{cases} \underbrace{\int_a^c + \underbrace{\int_c^d + \int_d^b}_{\text{prop 1}}}_{\text{def}} & \text{si } c \leq d \\ \underbrace{\underbrace{\int_a^d + \int_d^c}_{\text{prop 1}} + \int_c^b}_{\text{def}} & \text{si } d \leq c \end{cases} = \int_a^b$$

Autrement dit, la définition de $\int_a^b f(t) dt$ est indépendante du choix de $c \in]a; b[$.

Exemples : 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) dt$: diverge puisque $\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$ diverge.

Pourquoi on ne peut donner un sens à $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt$:

On a $\forall x > 0 \quad \int_{-x}^x \sin(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{-n\pi + \frac{\pi}{2}}^{n\pi} \sin(t) dt = (-1)^{n+1}$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$: pour $x \geq 1$, on a $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2(\sqrt{x} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ d'où la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$

et donc aussi celle de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$: pour $x \leq 0$, on a $\int_x^0 e^{-|t|} dt = 1 - e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$. Les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-|t|} dt$ et $\int_{-\infty}^0 e^{-|t|} dt$ convergent et sont égales à 1. Par suite, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$ converge et vaut 2.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$: converge et vaut π .

Remarque : Si $\int_a^b f(t) dt$ converge, étant donnée F une primitive de f ayant des limites finies en a et b , on peut écrire directement

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b$$

Par exemple $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan } t]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$

Vocabulaire : Pour un intégrande continue par morceaux, la notion d'intégrale convergente est définie sur un intervalle semi-ouvert et ouvert. Si l'intervalle est un segment, l'intégrale est également considérée *convergente* ce qui fait sens puisqu'elle est bien définie. Enfin, pour

$f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (éventuellement infinis), on peut simplement discuter de la convergence de l'intégrale en a et/ou b (en une borne fermée, c'est immédiat).

2 Premières propriétés

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (éventuellement infinis). Les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b \alpha f(t) dt$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ sont de même nature.

Démonstration. Immédiate. □

Proposition 3. Soient f, g dans $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (éventuellement infinis). Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt$ converge et est égale à $\int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt$.

Démonstration. Supposons $I = [a; b[$. On a par linéarité de l'intégrale

$$\forall x \in [a; b[\quad \int_a^x f(t) dt + \lambda \int_a^x g(t) dt = \int_a^x (f + \lambda g)(t) dt$$

Le terme de gauche admet une limite finie pour $x \rightarrow b$ et donc de même pour le terme de droite puis on passe à la limite. □

Proposition 4. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b[, \mathbb{K})$ avec $b > a$ et f prolongeable par continuité en b (respectivement $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a; b], \mathbb{K})$ et f prolongeable par continuité en a). Alors, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

Démonstration. Posons $\forall x \in [a; b] \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a; b[\\ \lim_{x \rightarrow b} f(x) & \text{si } x = b \end{cases}$

La fonction g est le prolongement de f par continuité en b donc $g \in \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{K})$. Par suite

$$\forall x \in [a; b[\quad \int_a^x f(t) dt = \int_a^x g(t) dt$$

Or, pour $x \in [a; b[$, on a

$$\left| \int_a^x g(t) dt - \int_a^b g(t) dt \right| = \left| \int_x^b g(t) dt \right| \leq (b - x) \|g\|_\infty \xrightarrow{x \rightarrow b} 0$$

d'où $\int_a^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_a^b g(t) dt$

□

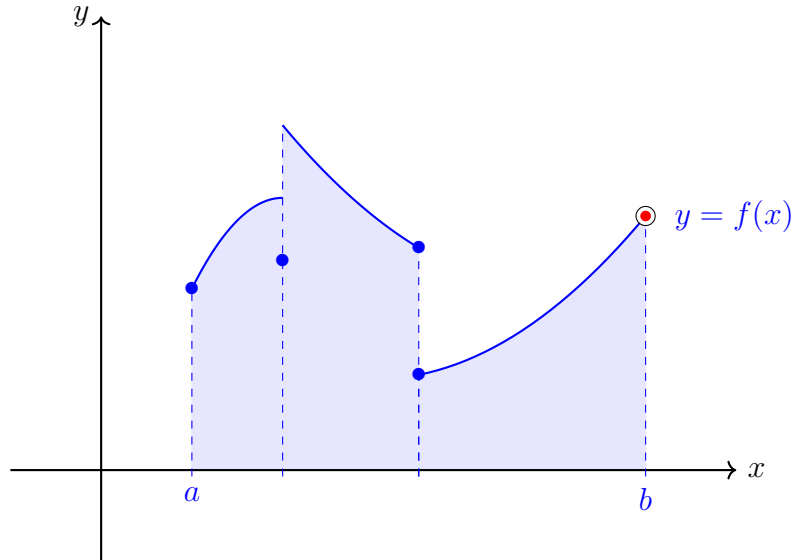
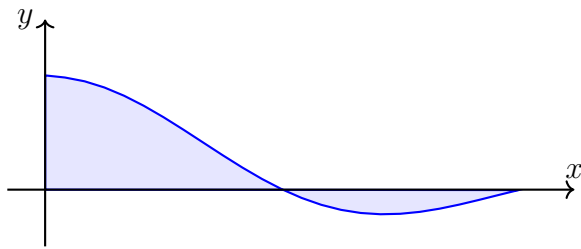


FIGURE 3 – Représentation d'une intégrale faussement impropre

Vocabulaire : L'intégrale est dite *faussement impropre* (pas de bornes infinies et pas de limites infinies).

Exemple :



On a $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t} \in \mathcal{C}_{pm}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ prolongeable par continuité en zéro d'où la convergence de l'intégrale faussement impropre $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

FIGURE 4 – Représentation de $\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$

Proposition 5. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{C})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (éventuellement infinis). L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si $\int_a^b \operatorname{Re}(f)(t) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f)(t) dt$ convergent.

Dans ce cas, on a
$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)(t) dt$$

i.e.
$$\operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t) dt \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left(\int_a^b f(t) dt \right) = \int_a^b \operatorname{Im}(f)(t) dt$$

Remarque : Les fonctions Re et Im sont continues (car 1-lipschitziennes) d'où la continuité par morceaux de $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

Démonstration. Par propriétés sur les limites des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. □

Proposition 6. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b[, \mathbb{K})$ avec $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ (respectivement $\mathcal{C}^0(]a; b], \mathbb{K})$ avec $a \in]-\infty; b[\cup \{-\infty\}$) telle que $\int_a^b f(t) dt$ converge. Alors $\Phi : x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b[$ et $\Phi' = -f$ (respectivement $\Psi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b]$ et $\Psi' = f$).

Démonstration. Notons F une primitive de f . On a pour $x \in]a; b[$

$$\Phi(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) - F(x)$$

Le résultat suit. □

Proposition 7. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\ell > 0$ tel que

$$\forall t \in [a; +\infty[\quad f(t) \geq \ell > 0$$

Alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge.

Démonstration. On a $\forall x \geq a \quad \int_a^x f(t) dt \geq \ell(x - a) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

□

Remarque : On a le même résultat avec $\ell < 0$ et $f(t) \leq \ell < 0$.

Proposition 8. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; +\infty[, \mathbb{R})$. S'il existe ℓ réel tel que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$ et si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors $\ell = 0$.

Démonstration. Supposons $\ell > 0$. On dispose d'un seuil $t_0 \geq a$ tel que $f(t) \geq \ell/2$ pour $t \geq t_0$ d'où une contradiction d'après le résultat précédent. La preuve est identique si $\ell < 0$. Le résultat suit. □

Remarque : Il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ positives, non bornées dont l'intégrale est convergente ! (voir plus tard)

3 Exemples fondamentaux

Proposition 9. Soit α réel. On a

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \text{ converge} \iff \alpha > 0$$

Si $\alpha > 0$, on a $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$.

Démonstration. Si $\alpha = 0$, on a $e^{-\alpha t} = 1$ pour $t \geq 0$ d'où la divergence de l'intégrale d'après la proposition 7. Si $\alpha \neq 0$, on a pour $x \geq 0$

$$\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} [1 - e^{-\alpha x}]$$

Le résultat suit. □

Théorème 1 (Intégrales de Riemann). Soit α un réel.

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Si elle converge, on a $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$.

2. L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Si elle converge, on a $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$.

Démonstration. 1. Si $\alpha = 1$, pour $x \geq 1$, on a $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) \rightarrow +\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$. Puis, si $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1 - \alpha)t^{\alpha-1}} \right]_1^x = \frac{1}{1 - \alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right]$$

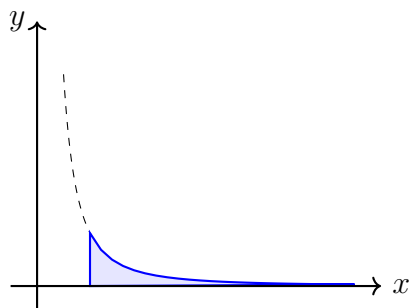
Le résultat suit.

2. Si $\alpha = 1$, pour $x \in]0; 1]$, on a $\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x) \rightarrow +\infty$ pour $x \rightarrow 0^+$. Puis, si $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{1}{(1 - \alpha)t^{\alpha-1}} \right]_x^1 = \frac{1}{1 - \alpha} \left[1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]$$

Le résultat suit. □

Remarques : (1)



Il s'agit d'équivalences. Ainsi, par négation, on a pour la première équivalence

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ diverge} \iff \alpha \leq 1$$

FIGURE 5 – Représentation de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$

(2) ⚠ L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est toujours divergente. En effet, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ diverge} \iff \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ ou } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ divergent} \iff \alpha \leq 1 \text{ ou } \geq 1$$

Cette dernière assertion étant vraie, on en déduit la divergence de l'intégrale considérée.

4 Comparaison pour des fonctions positives

Dans le cas de fonctions négatives, il suffit de considérer les opposés de celles-ci pour appliquer les résultats qui suivent.

Proposition 10. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a; b[, \mathbb{R})$ avec b éventuellement infini, positive (respectivement $\mathcal{C}_{pm}(]a; b], \mathbb{R}_+)$ avec a éventuellement infini). L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée (respectivement $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$).

Démonstration. Comme f est positive, on a la croissance de $F : x \mapsto \int_a^x f$. D'après le théorème de limite monotone, une fonction croissante est majorée sur $[a; b[$ si et seulement si elle admet une limite finie en b . La preuve est identique pour l'autre cas. $\square$

Théorème 2 (Théorème de comparaison). Soient f, g dans $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (éventuellement infinis) et f, g positives avec $f \leq g$.

1. Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.
2. Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge et on a

$$0 \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Démonstration. Si I est un segment, les intégrales convergent et on a l'encadrement annoncé. On traite le cas où I n'est pas un segment. On suppose $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a; b[, \mathbb{R}_+)$. Comme f et g sont positives, on a la croissance des fonctions

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\forall x \in [a; b[\quad 0 \leq F(x) \leq G(x)$$

1. Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors F n'est pas majorée donc G non plus d'où la divergence de $\int_a^b g(t) dt$.
2. Par contraposition, on a l'implication attendue et passant à la limite dans l'inégalité précédente, on a l'inégalité souhaitée.

La preuve est identique pour $]a; b]$ et le cas $]a; b[$ se déduit des cas précédents. $\square$

Remarques : (1)  Attention à ne pas écrire **directement**

$$0 \leq f \leq g \implies 0 \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

On vérifie d'abord la convergence avant d'écrire l'encadrement.

- (2) Si $\int_a^b g(t) dt$ diverge, le théorème ne dit rien sur $\int_a^b f(t) dt$ et si $\int_a^b f(t) dt$ converge, le théorème ne dit rien sur $\int_a^b g(t) dt$.

Corollaire 1. Soient f, g dans $\mathcal{C}_{pm}([a; b[, \mathbb{R})$ avec $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$, f, g positives et $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$. Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Démonstration. Il existe $c \in [a; b[$ et $M > 0$ tels que

$$\forall t \in [c; b[\quad 0 \leq f(t) \leq Mg(t)$$

Le résultat suit d'après le théorème de comparaison précédent. $\square$

Remarques : (1) On dispose du même résultat pour des fonctions continues par morceaux sur $]a; b]$ avec $a \in]-\infty; b[\cup \{-\infty\}$ et des comportements asymptotiques au voisinage de a .

(2) Si $f = o(g)$, alors $f = O(g)$ et le corollaire précédent s'applique.

Exemples : 1. Nature de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

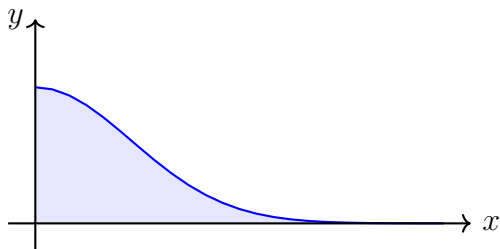


FIGURE 6 – Représentation de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

On a $t \mapsto e^{-t^2} \in \mathcal{C}_{pm}([0; +\infty[, \mathbb{R})$ positif et $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, il s'ensuit par comparaison que $\int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge également et elle est de même nature que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

2. Nature de $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)^2 dt$.

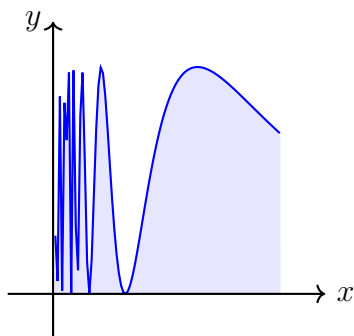


FIGURE 7 – Représentation de $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)^2 dt$

On a $t \mapsto \sin\left(\frac{1}{t}\right)^2 \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1], \mathbb{R})$ positif et

$$\forall t \in]0; 1] \quad 0 \leq \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) \leq 1$$

Par comparaison, il s'ensuit que $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge. Le résultat n'est pas trivial puisque l'intégrande n'admet pas de limite en zéro. Mais l'aire sous la courbe si.

3. Nature de $\int_0^1 \ln(t) dt$.

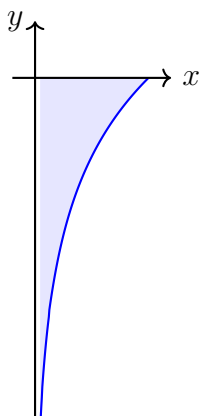


FIGURE 8 – Représentation de $\int_0^1 \ln(t) dt$

On a $t \mapsto \ln(t) \in \mathcal{C}_{pm}(]0; 1], \mathbb{R})$ négative et $-\ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Par comparaison, on en déduit que $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge. On peut aussi écrire pour $x \in]0; 1]$

$$\int_x^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_1^x = -1 - x \ln(x) + x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$$

par croissances comparées. On retrouve la convergence de $\int_0^1 \ln(t) dt$ et on a $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$.

4. Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t} dt$.

On a $\forall t \geq e \quad \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t} \geq \frac{1}{t} \geq 0$

Par comparaison, on conclut à la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t} dt$.

Corollaire 2. Soient f, g dans $\mathcal{C}_{pm}([a; b[, \mathbb{R})$ avec $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$, f, g positives et $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$. Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

Démonstration. C'est la contraposée du résultat précédent. □

Remarque : Les remarques mentionnées au corollaire précédent valent à l'identique.

Corollaire 3 (Critère des équivalents). Soient f, g dans $\mathcal{C}_{pm}([a; b[, \mathbb{R})$ avec $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$, f, g positives et $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$. On a $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ de même nature.

Démonstration. On a $f = O(g)$. Par suite, si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge. On a l'autre implication par symétrie des rôles. □

Remarques : (1) On dispose du même résultat pour des fonctions continues par morceaux sur $]a; b]$ avec $a \in]-\infty; b[\cup \{-\infty\}$ et des comportements asymptotiques au voisinage de a .
 (2) Lors de l'utilisation de ce critère, on prendra toujours soin de mentionner le signe constant.

Proposition 11. Soient $f, g \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ avec a une extrémité de I hors de I . Si $f(t) \underset{t \rightarrow a}{\sim} g(t)$ et si g positive au voisinage de a , alors f est positive au voisinage de a .

Vocabulaire : Voisinage de a signifie ici un intervalle inclus dans I d'extrémité a .

Démonstration. Il existe V voisinage de a tel que $g(t) \geq 0$ et $|f(t) - g(t)| \leq g(t)/2$ pour $t \in V$ d'où

$$\forall t \in V \quad g(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(t) \geq g(t)/2 \geq 0$$

□

Exemple : $\sin\left(\frac{\sqrt{\ln(t)}}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\ln(t)}}{t} \geq 0$ pour $t > 1$. Par suite, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{\ln(t)}}{t}\right) dt$ diverge.

Proposition 12. Soient f, g, h dans $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (éventuellement infinis). On suppose $f \leq g \leq h$ et les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b h$ convergentes. Alors, l'intégrale $\int_a^b g$ converge.

Démonstration. On a $0 \leq g - f \leq h - f$ et l'intégrale $\int_a^b (h - f)$ converge d'où la convergence de $\int_a^b (g - f)$ par comparaison. Par linéarité, il en résulte que l'intégrale $\int_a^b (g - f + f) = \int_a^b g$ converge. □

II Fonctions intégrables

1 Intégrabilité

Définition 5. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (éventuellement infinis). La fonction f est dite intégrable ou d'intégrale absolument convergente sur I si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge. On dit aussi f intégrable en a et/ou b selon les cas d'ouvertures.

Notation : L'ensemble des fonctions intégrables sur I est noté $L^1(I, \mathbb{K})$. Pour f intégrable sur I , on note $\int_I f$ pour $\int_a^b f(t) dt$.

Remarque : Pour $f \geq 0$, l'intégrabilité de f sur I équivaut la convergence de l'intégrale $\int_a^b f$. La fonction $|f|$ est bien continue par morceaux comme composée de $z \mapsto |z|$ avec f , le module étant continue par inégalité triangulaire inverse.

Proposition 13. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (éventuellement infinis). L'intégrabilité de f sur I équivaut à l'intégrabilité de f sur l'intérieur de I .

Démonstration. Si l'intervalle I est ouvert, il n'y a rien à faire. Si a et/ou b est fermée, ouvrir la borne de l'intervalle y rend l'intégrale faussement impropre et ne change pas sa nature. □

Exemple : Soit $f(t) = 1/t^2$ pour $t \in I =]1; +\infty[$. La fonction f est intégrable sur I puisqu'on sait qu'elle est continue et intégrable sur $[1; +\infty[$ ouvrir la borne 1 y rend l'intégrale faussement impropre.

Proposition 14. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ finis. Si I est un segment ou si f est prolongeable par continuité en les bornes éventuellement ouvertes de I , alors f est intégrable sur I .

Démonstration. Si l'intervalle I est un segment, l'intégrale $\int_a^b |f|$ est bien définie donc convergente. Sinon, on applique la proposition 4 à $|f|$. $\square$

2 Propriétés fondamentales

Théorème 3. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ (éventuellement infinis). Si f est intégrable sur I , alors $\int_I f$ est convergente.

Démonstration. Supposons f à valeurs réelles. On a $-|f| \leq f \leq |f|$ et d'après la proposition 12, on en déduit que l'intégrale $\int_I f$ converge.

Supposons f à valeurs complexes. On a

$$|\operatorname{Re}(f)| \leq |f| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$$

puis on applique le cas précédent sur $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. $\square$

Exemple : Nature de $\int_0^{+\infty} \sin(te^{-t}) dt$.

Remarque : La réciproque du théorème est fausse (et délicate). Une fonction non intégrable mais dont l'intégrale converge est dite d'intégrale *semi-convergente*.

Théorème 4. L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev donc en particulier :

1. si $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in L^1(I, \mathbb{K})$, alors $\lambda f \in L^1(I, \mathbb{K})$;
2. si $(f, g) \in L^1(I, \mathbb{K})^2$, alors $f + g \in L^1(I, \mathbb{K})$.

Remarque : Si I est un segment, cet ensemble est égal à $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ puisque l'intégrabilité y est acquise.

Démonstration. 1. Preuve immédiate.

2. On a $|f + g| \leq |f| + |g|$ et le résultat suit d'après la prop 3 et par comparaison.

L'ensemble considéré contient la fonction nulle et est donc un sev de $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$. $\square$

Proposition 15. L'application $L^1(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire.

Démonstration. Conséquence du théorème 3 et de la prop 3. $\square$

Proposition 16 (Positivité, croissance).

1. Soit $f \in L^1(I, \mathbb{R})$ avec $f \geq 0$. Alors $\int_I f \geq 0$.
2. Soient f, g dans $L^1(I, \mathbb{R})$ avec $f \leq g$. Alors $\int_I f \leq \int_I g$.

Démonstration. 1. Par positivité de l'intégrale sur un segment et passage à la limite.

2. On écrit $g = (g - f) + f$, on a $g - f$ et f intégrable d'où par linéarité puis positivité de l'intégrale

$$\int_I g = \underbrace{\int_I (g - f)}_{\geq 0} + \int_I f \geq \int_I f$$

$\square$

Proposition 17 (Relation de Chasles). Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cup J$ est un intervalle et $I \cap J$ est soit vide, soit réduit à un point, $f \in \mathcal{C}_{pm}(I \cup J, \mathbb{K})$ et f intégrable sur I et J . Alors, on a $f \in L^1(I \cup J, \mathbb{K})$ et

$$\int_{I \cup J} f = \int_I f + \int_J f$$

Démonstration. Résulte soit de la prop 1, soit de la définition d'une intégrale généralisée sur un intervalle ouvert avec éventuellement des prolongements par continuité en $I \cap J$ (disjonctions de cas). $\square$

Proposition 18 (Inégalité triangulaire). Soit $f \in L^1(I, \mathbb{K})$. On a

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$$

Démonstration. Supposons $I = [a; b[$ (preuve identique pour les autres cas). Soit $x \in [a; b[$, on a par inégalité triangulaire sur $[a; x]$:

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt$$

Passant à la limite $x \rightarrow b$ (tout converge), on obtient l'inégalité attendue. $\square$

Proposition 19. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ positive, intégrable sur I et J intervalle avec $J \subset I$. Alors f est intégrable sur J et $0 \leq \int_J f \leq \int_I f$.

Démonstration. Conséquence de la relation de Chasles (disjonction de cas, fastidieux). $\square$

Théorème 5 (Propriété de séparation). Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ avec $f \geq 0$ et $f \in L^1(I, \mathbb{R})$. On a

$$\int_I f = 0 \iff f = 0$$

Démonstration. Soit $[\alpha; \beta] \subset I$. Notons $a = \inf I$ et $b = \sup I$. Par relation de Chasles, on a

$$0 = \int_a^b f(t) dt = \int_a^\alpha + \int_\alpha^\beta + \int_\beta^b \geq \int_\alpha^\beta \geq 0$$

D'où, par séparation sur un segment f s'annule sur tout segment inclus dans I donc f s'annule sur I tout entier. $\square$

Remarque : Pour invoquer la propriété de séparation, il est fondamental de mentionner *continue et positive*.

3 Théorèmes de comparaison

Théorème 6. Soient f, g dans $\mathcal{C}_{pm}([a; b[, \mathbb{K})$ avec $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$. Si g est intégrable sur $[a; b[$ et si $f(t) = O(g(t))$ ou $o(g(t))$ ou $\sim g(t)$, alors f est intégrable sur $[a; b[$.

Démonstration. Conséquence du corollaire 1. $\square$

Remarque : On dispose du même résultat pour des fonctions continues par morceaux sur $]a; b]$ avec $a \in]-\infty; b[\cup \{-\infty\}$ et des comportements asymptotiques au voisinage de a .

Applications : Comparaison à intégrale de Riemann

1. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a; +\infty[, \mathbb{K})$ et si $f = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $\sim \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha > 1$, alors f intégrable sur $]a; +\infty[$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]0; a], \mathbb{K})$ et si $f = O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ ou $\sim \frac{1}{t^\alpha}$ avec $\alpha < 1$, alors f intégrable sur $]0; a]$.

Exemples : 1. Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} dt$.

On a $\frac{\ln(t)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ d'où la convergence absolue de l'intégrale par comparaison à une intégrale de Riemann convergente.

2. Nature de $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.

On a $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1)$ et $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ d'où la convergence absolue de l'intégrale. Par ailleurs, on a $\left| \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \right| \leq 2$ puisque

$$\left| \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \right| dt \leq \int_0^1 dt + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 2$$

4 Intégration des relations de comparaison

Dans cette section, la fonction g est supposé positive mais les résultats valent aussi pour g négative (en considérant $-g$).

Théorème 7. Soit f, g continues par morceaux sur $[a; b[$ avec $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ avec f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g positive, intégrable sur $[a; b[$.

1. Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} o(g(t))$, alors f est intégrable et

$$\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$$

2. Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable et

$$\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_x^b g(t) dt\right)$$

3. Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$, alors f est intégrable et

$$\int_x^b f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g(t) dt$$

Démonstration. La fonction f est intégrable par comparaison. Supposons $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} o(g(t))$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a; b[$ tel que

$$\forall t \in [c; b[\quad |f(t)| \leq \varepsilon g(t)$$

Puis, comme $\int_a^b g(t) dt$ converge, par comparaison et inégalité triangulaire, il vient

$$\forall x \in [c; b[\quad \left| \int_x^b f(t) dt \right| \leq \int_x^b |f(t)| dt \leq \varepsilon \int_x^b g(t) dt$$

d'où le résultat. La preuve avec $f(t) = O(g(t))$ est identique et le cas $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$ se déduit du premier avec $f(t) = g(t) + o(g(t))$. $\square$

Remarque : On dispose du même résultat pour des fonctions continues par morceaux sur $]a; b]$ avec $a \in]-\infty; b[\cup \{-\infty\}$ et des comportements asymptotiques au voisinage de a .

Exemples : 1. On a

$$\int_x^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x}$$

2. On a

$$\forall \alpha > 0 \quad \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

puisque

$$e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^{1+\alpha}}\right)$$

Théorème 8. Soit f, g continues par morceaux sur $[a; b[$ avec $b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$ avec f à valeurs dans $\mathbb{K}$ et g positive, non intégrable sur $[a; b[$.

1. Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} o(g(t))$, alors

$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$$

2. Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} O(g(t))$, alors

$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$$

3. Si $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$, alors

$$\int_a^x f(t) dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g(t) dt$$

Démonstration. Comme g est positive et non intégrable, alors $\int_a^x g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$. Supposons $f(t) \underset{t \rightarrow b}{=} o(g(t))$. Soit $\varepsilon > 0$ et $c \in [a; b[$ tel que

$$\forall t \in [c; b[\quad |f(t)| \leq \varepsilon g(t)$$

Par suite, il vient

$$\forall x \in [c; b[\quad \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt \leq \int_a^c |f(t)| dt + \underbrace{\int_c^x \varepsilon g(t) dt}_{\leq \int_a^x \dots}$$

Or
$$\int_a^c |f(t)| dt / \int_a^x g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'où, il existe $d \in [c; b[$ tel que pour $x \in [d; b[$

$$\int_a^x f(t) dt \leq 2\varepsilon \int_a^x g(t) dt$$

Le résultat suit. La preuve avec $f(t) = O(g(t))$ est identique et le cas $f(t) \underset{t \rightarrow b}{\sim} g(t)$ se déduit du premier avec $f(t) = g(t) + o(g(t))$. $\square$

Remarque : On dispose du même résultat pour des fonctions continues par morceaux sur $]a; b]$ avec $a \in]-\infty; b[\cup \{-\infty\}$ et des comportements asymptotiques au voisinage de a .

Exemples : 1. On a

$$\int_1^x \operatorname{th}\left(\frac{1}{t}\right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x)$$

et par suite
$$\int_0^x \operatorname{th}\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_0^1 \operatorname{th}\left(\frac{1}{t}\right) dt + \int_1^x \operatorname{th}\left(\frac{1}{t}\right) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ell > 0$. Alors

$$\int_0^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ell x$$

III Transformations d'intégrales

1 Théorème de changement de variable

Théorème 9 (Théorème du changement de variable). Soit $f \in \mathcal{C}^0(]a; b[, \mathbb{K})$ avec a et b éventuellement infinis et $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Démonstration. Soit $[\alpha'; \beta'] \subset]\alpha; \beta[$ et notons $a' = \varphi(\alpha')$ et $b' = \varphi(\beta')$. On a, par croissance de φ et bijectivité de $] \alpha; \beta [$ sur $] a; b [$,

$$a' \xrightarrow[\alpha' \rightarrow \alpha]{} a \quad \text{et} \quad b' \xrightarrow[\beta' \rightarrow \beta]{} b$$

et de même, avec $\alpha' = \varphi^{-1}(a')$ et $\beta' = \varphi^{-1}(b')$, on a

$$\alpha' \xrightarrow[a' \rightarrow a]{} \alpha \quad \text{et} \quad \beta' \xrightarrow[b' \rightarrow b]{} \beta$$

D'après le théorème de changement de variable (usuel) sur $[\alpha'; \beta']$, on a

$$\int_{a'}^{b'} f(t) dt = \int_{\alpha'}^{\beta'} f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$$

Par suite, l'intégrale de gauche admet une limite finie pour $a' \rightarrow a$, $b' \rightarrow b$ si et seulement si l'intégrale de droite admet une limite finie pour $\alpha' \rightarrow \alpha$, $\beta' \rightarrow \beta$, autrement dit les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$ sont de même nature. En cas de convergence, il suffit de passer à la limite pour avoir l'égalité souhaitée. $\square$

Théorème 10 (Théorème du changement de variable). Soit $f \in \mathcal{C}^0(]a; b[, \mathbb{K})$ avec a et b éventuellement infinis et $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ bijective, strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $-\int_\alpha^\beta f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Démonstration. Soit $[\alpha'; \beta'] \subset]\alpha; \beta[$ et notons $b' = \varphi(\alpha')$ et $a' = \varphi(\beta')$. On a, par décroissance de φ et bijectivité de $] \alpha; \beta [$ sur $] a; b [$,

$$a' \xrightarrow{\beta' \rightarrow \beta} a \quad \text{et} \quad b' \xrightarrow{\alpha' \rightarrow \alpha} b$$

et de même, avec $\alpha' = \varphi^{-1}(b')$ et $\beta' = \varphi^{-1}(a')$, on a

$$\alpha' \xrightarrow{b' \rightarrow b} \alpha \quad \text{et} \quad \beta' \xrightarrow{a' \rightarrow a} \beta$$

D'après le théorème de changement de variable (usuel) sur $[\alpha'; \beta']$, on a

$$\int_{a'}^{b'} f(t) dt = \int_{\beta'}^{\alpha'} f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du = - \int_{\alpha'}^{\beta'} f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$$

La suite de la preuve est identique à la précédente. $\square$

Remarques : (1) On peut appliquer ces théorèmes même si la fonction f est définie continue en une des bornes a ou b . En cette borne ouverte, l'intégrale y est simplement faussement impropre.

(2) L'omission des hypothèses est tolérée dans le cas d'un changement de variables donné par une fonction affine ou puissance ou exponentielle ou logarithme.

Application : Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ avec $a = \inf I$ et $b = \sup I$ finies. On a

$$f \text{ intégrable en } a \iff u \mapsto f(u+a) \text{ intégrable en } 0$$

$$\text{et} \quad f \text{ intégrable en } b \iff u \mapsto f(b-u) \text{ intégrable en } 0$$

Corollaire 4. Soient a, b, α des réels et $a < b$.

$$1. \quad \int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1$$

$$2. \quad \int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1$$

Démonstration. 1. On pose $f(t) = \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ pour $t \in [a; b[$. On a $f \in \mathcal{C}^0([a; b[, \mathbb{R})$. Comme la fonction f est positive, son intégrabilité en b équivaut à la convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ et d'après l'application mentionnée précédemment, on a

$$f \text{ intégrable en } b \iff u \mapsto f(b-u) = \frac{1}{u^\alpha} \text{ intégrable en } 0 \iff \alpha < 1$$

2. Identique. $\square$

Exemples : 1. Avec $u = t^2$, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^4} dt = \frac{\pi}{4}$$

2. Avec $u = \frac{1}{t}$, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{(1+u)^2} du \implies \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt = 0$$

Proposition 20. Soit $f \in \mathcal{C}^0(]-a; a[, \mathbb{K})$ avec $a \in]0; +\infty[\cup \{+\infty\}$. Si $\int_0^a f(t) dt$ converge et si f est paire ou impaire, alors $\int_{-a}^a f(t) dt$ converge et

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \begin{cases} 2 \int_0^a f(t) dt & \text{si } f \text{ paire} \\ 0 & \text{si } f \text{ impaire} \end{cases}$$

Démonstration. Avec le changement de variables $u = -t$, les intégrales

$$\int_0^a f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{-a}^0 f(-u) du$$

sont de même nature donc convergentes et par conséquent égales. Le résultat suit. $\square$

2 Intégration par parties

Théorème 11 (Théorème d'intégration par parties). Soient u et v dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ avec I intervalle $a = \inf I$, $b = \sup I$ (éventuellement infinis). Si le produit uv admet des limites finies en a et b alors les intégrales $\int_I uv'$ et $\int_I u'v$ sont de même nature. En cas de convergence, on a

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [uv]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Démonstration. Par intégration par parties sur $[a'; b'] \subset]a; b[$, on a

$$\int_{a'}^{b'} u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_{a'}^{b'} - \int_{a'}^{b'} u(t)v'(t) dt$$

Si le produit uv admet des limites finies en a et b , alors $\int_{a'}^{b'} u'(t)v(t) dt$ admet une limite finie

pour $a' \rightarrow a$, $b' \rightarrow b$ si et seulement si $\int_{a'}^{b'} u(t)v'(t) dt$ admet une limite finie pour $a' \rightarrow a$, $b' \rightarrow b$

autrement dit les intégrales $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ et $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ sont de même nature. Dans le cas de convergence, l'égalité s'obtient par passage à la limite. $\square$

Remarque : On apportera une attention particulière au choix d'une primitive lors d'une intégration par parties. En effet, selon la primitive utilisée, le crochet peut être fini ou pas.

Exemples : 1. L'intégrale de *Dirichlet*

- Convergence de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et égalité avec $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt$.

Le crochet $\left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_0^{+\infty}$ est fini et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge. Ainsi, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \underbrace{\left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

Par trigonométrie, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin(t/2)^2}{t^2} dt$$

Enfin, avec le changement de variables $u = t/2$, on conclut

L'intégrale de *Dirichlet* converge et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt$.

- Divergence de $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$.

On a $|\sin(t)| \geq \sin(t)^2 = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$ pour tout t réel. Avec le changement de variable $u = 2t$,

les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ et $\int_2^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ sont de même nature et donc convergentes en

procédant à nouveau par intégration par parties. Si $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{t} dt$ converge, alors par

linéarité $\int_1^{+\infty} \left[\frac{1 - \cos(2t)}{t} + \frac{\cos(2t)}{t} \right] dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ converge ce qui est absurde. On en déduit

la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{t} dt$ et par comparaison

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge.

2. Équivalent de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ pour $x \rightarrow +\infty$. On a

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$$

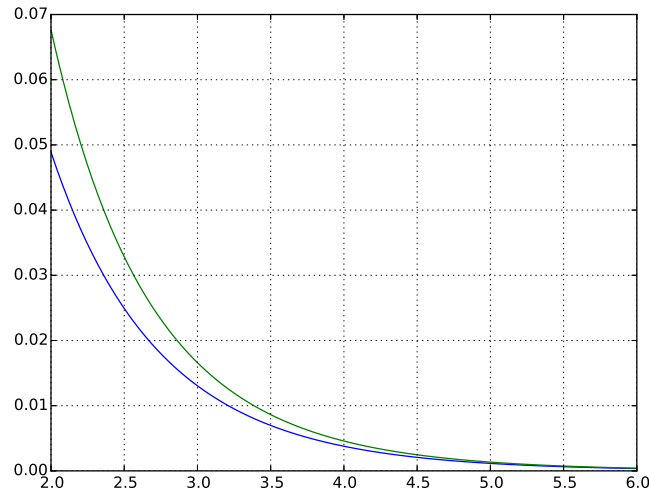


FIGURE 9 – Graphes de $y = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $y = \frac{e^{-x}}{x}$

IV Fonctions définies par une intégrale

On parle aussi d'*intégrales à paramètres*.

1 Convergence dominée

Pour J intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\bar{J}$ l'adhérence de J , c'est-à-dire l'intervalle J dont on ferme les bornes finies.

Théorème 12 (Théorème de convergence dominée). Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\ell \in \bar{J}$ ou ℓ extrémité infinie de J . Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ une famille de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ vérifiant :

1. les f_λ sont continues par morceaux ;
2. On a $f_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow \ell]{} f$ avec f continue par morceaux ;
3. Domination : il existe $\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall \lambda \in J \quad |f_\lambda| \leq \varphi$$

Alors, les f_λ et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda \rightarrow \ell]{} \int_I f$$

[Admis]

Exemple : On pose $\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$

Limite puis équivalent de $F(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.

On a $\forall x > 1 \quad \forall t \geq 0 \quad 0 \leq \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \varphi(t) = e^{-t}$

avec $\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$. φ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on a

$$\forall t \geq 0 \quad \frac{e^{-t}}{x+t} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Par convergence dominée $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Puis $\forall t \geq 0 \quad x \frac{e^{-t}}{x+t} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-t}$ et $\forall t \geq 0 \quad 0 \leq x \frac{e^{-t}}{x+t} \leq e^{-t}$

Par convergence dominée $xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$

Autrement dit $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

2 Continuité sous l'intégrale

Dans ce qui suit, l'ensemble X désigne une partie non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

Théorème 13. Soit $f : X \times I \rightarrow \mathbb{K}, (x, t) \rightarrow f(x, t)$. On suppose

1. $\forall x \in X \quad f(x, \cdot) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$
2. $\forall t \in I \quad f(\cdot, t) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{K})$
3. Domination : Il existe $\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors, la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est bien définie et continue sur X .

[Admis]

Remarques : (1) Dans un premier temps, on considère que X est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point (on utilisera le cas de X partie non vide d'un evn ultérieurement).

(2) L'hypothèse majeure de ce théorème est l'hypothèse de domination. La continuité est une propriété locale. Pour établir la continuité en $x_0 \in X$, une domination sur un voisinage de x_0 suffit. Dans le cas où X est un intervalle de $\mathbb{R}$ (cas le plus fréquent), si on ne parvient à établir une domination globale, à savoir sur X tout entier, on se contente d'une domination locale sur tout segment $[a; b] \subset X$, ou $[-a; a] \subset X$ ($a > 0$) ou sur $[a; +\infty[\subset X$, etc. ...

Exemples : 1. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt} dt$ (vue comme intégrale sur $]0; +\infty[$). L'exemple est très naïf puisque le calcul explicite est possible avec $F(x) = 1$ pour $x > 0$ et $F(0) = 0$. Une domination globale ne fonctionne pas puisque $t \mapsto \sup_{x \geq 0} xe^{-xt} = \frac{e^{-1}}{t}$ n'est pas intégrable. Pour $x \in [a; b[$ avec $0 < a \leq b$, on a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times [0; +\infty[\quad 0 \leq xe^{-xt} \leq be^{-at}$$

dominante qui est intégrable d'où la continuité de F sur tout segment de $]0; +\infty[$ et donc sur $]0; +\infty[$.

2. Pour $x \in]0; 1[$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$. On a

$$\forall t \in]0; 1[\quad \sup_{x \in]0; 1[} f(x, t) = \frac{1}{t(1+t)} \quad \text{et} \quad \forall t > 1 \quad \sup_{x \in]0; 1[} f(x, t) = \frac{1}{1+t}$$

Il faut donc rester à distance de 0 et de 1. On procède à une domination locale sur $[a; b] \subset]0; 1[$ avec

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[\quad \frac{1}{t^x(1+t)} \leq \frac{1}{t^b(1+t)} + \frac{1}{t^a(1+t)}$$

dominante qui est intégrable d'où la continuité de F sur $[a; b]$ pour tout $[a; b] \subset]0; 1[$ et donc la continuité sur $]0; 1[$.

3 Régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale

Dans ce qui suit, l'ensemble X désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

Théorème 14. Soit $f : X \times I \rightarrow \mathbb{K}, (x, t) \mapsto f(x, t)$. On suppose :

1. $\forall x \in X \quad f(x, \cdot) \in L^1(I, \mathbb{K})$;
2. $\forall t \in I \quad f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{K})$
3. $\forall x \in X \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$
4. Domination : Il existe $\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors, la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est bien définie de classe $\mathcal{C}^1$ sur X avec

$$\forall x \in X \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

[Admis]

Vocabulaire : Ce théorème est aussi intitulé *théorème de dérivation sous l'intégrale* ou *théorème de Leibniz*.

Remarque : Comme pour la continuité, le caractère $\mathcal{C}^1$ est une propriété locale et on peut et même on doit se contenter d'une domination locale si on ne parvient pas à réaliser une domination globale.

Exemple : On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$

On trouve $\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ puis $F(x) = \text{Arctan}(x)$

4 Régularité $\mathcal{C}^k$ sous l'intégrale

Dans ce qui suit, l'ensemble X désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point.

Théorème 15. Soit $f : X \times I \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, t) \rightarrow f(x, t)$ et k entier non nul. On suppose :

1. $\forall x \in X \quad f(x, \cdot) \in L^1(I, \mathbb{K})$;
2. $\forall t \in I \quad f(\cdot, t) \in \mathcal{C}^k(X, \mathbb{K})$
3. $\forall x \in X \quad \forall j \in \llbracket 1 ; k-1 \rrbracket \quad \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot) \in L^1(I, \mathbb{K})$;
4. $\forall x \in X \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, \cdot) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$;
5. Domination : Il existe $\varphi \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors, la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est bien définie de classe $\mathcal{C}^k$ sur X avec

$$\forall x \in X \quad \forall j \in \llbracket 1 ; k \rrbracket \quad F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt$$

[Admis]

Remarque : Comme pour la continuité, le caractère $\mathcal{C}^k$ est une propriété locale et on peut et même on doit se contenter d'une domination locale si on ne parvient pas à réaliser une domination globale.

Commentaire : La domination de la k -ième dérivée partielle garantit une domination locale pour chacune des dérivées partielles intermédiaires. Soit $[a; b] \subset X$. On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x, t) = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a, t) + \int_a^x \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(u, t) du$$

Par inégalité triangulaire, il vient

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times I \quad \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(x, t) \right| \leq \left| \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}(a, t) \right| + (b-a)\varphi(t)$$

On obtient donc localement une dominante pour $\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x^{k-1}}$ et il suffit de procéder par récurrence pour obtenir des dominantes pour chaque dérivée partielle intermédiaire.

Un exemple incontournable : La fonction Γ d'Euler

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Montrer que Γ est bien définie sur $]0; +\infty[$.
2. Établir $\forall x > 0 \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

En déduire $\Gamma(n+1)$ pour tout n entier.

3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall (k, x) \in \mathbb{N} \times]0; +\infty[\quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$$

4. Montrer que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in]0; +\infty[^2 \quad f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$

Soit $x > 0$. On a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ et

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{avec} \quad 1-x < 1 \quad \text{et} \quad t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par suite, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$ d'où

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est bien définie sur }]0; +\infty[.}$$

Remarque : On peut aussi considérer $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} dt$ avec $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$ puisque $t \mapsto t^{z-1}e^{-t} = e^{(z-1)\ln(t)}e^{-t}$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et

$$\forall t > 0 \quad |t^{z-1}e^{-t}| = t^{\text{Re}(z)-1}e^{-t}$$

2. Soit $x > 0$. Les fonctions $t \mapsto -e^{-t}$ et $t \mapsto t^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. On a $-t^x e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ et $-t^x e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Comme le crochet $[-t^x e^{-t}]$ admet des limites finies en 0 et $+\infty$, les

intégrales $\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} x t^{x-1} e^{-t} dt$ sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

En particulier, pour n entier non nul, on a $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ et une récurrence immédiate donne $\Gamma(n+1) = n!$.

3. On montre que Γ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0; +\infty[$ avec n entier non nul.

- D'après le résultat de la première question, pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable.

- Pour $t > 0$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^n(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\forall (x, t) \in]0; +\infty[^2 \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t}$$

- Pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et $x > 0$, on a $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ et pour $\alpha \in]0; x[$, on a

$$\ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-\alpha}}\right) \quad \text{et} \quad \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad \forall x > 0 \quad t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \text{ intégrable sur }]0; +\infty[.}$$

- Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(]0; +\infty[, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

- Domination : Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[\quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi(t) = |\ln(t)|^n (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}$$

Soit $\alpha \in]0; a[$. On a

$$t^{1-\alpha}\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln(t)| t^{a-\alpha} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \iff \varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1-\alpha}}\right) \quad \text{et} \quad \varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

par croissances comparées. Ainsi, la fonction φ est intégrable. Par conséquent, la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$ donc sur $]0; +\infty[$ et ce pour tout n entier donc

$$\boxed{\Gamma \in \mathcal{C}^\infty(]0; +\infty[, \mathbb{R})}$$

4. Pour $x > 0$, on a $f(x, \cdot)$ continue sur I , positive non nulle d'où $\Gamma(x) > 0$ par séparation de l'intégrale. On en déduit que $\ln \circ \Gamma$ est deux fois dérivable comme composée de telles fonctions et par dérivation

$$\forall x > 0 \quad (\ln \circ \Gamma)'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

puis

$$\forall x > 0 \quad \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)'(x) = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2}$$

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz classique (dans $F = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ muni de $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$ pour $(f, g) \in F^2$), on a

$$\left(\int_a^b \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b \ln(t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt\right) \left(\int_a^b t^{x-1} e^{-t} dt\right)$$

Faisant tendre $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow +\infty$, toutes les intégrales concernées étant convergentes, on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } \frac{\Gamma'}{\Gamma} \text{ croît .}}$$

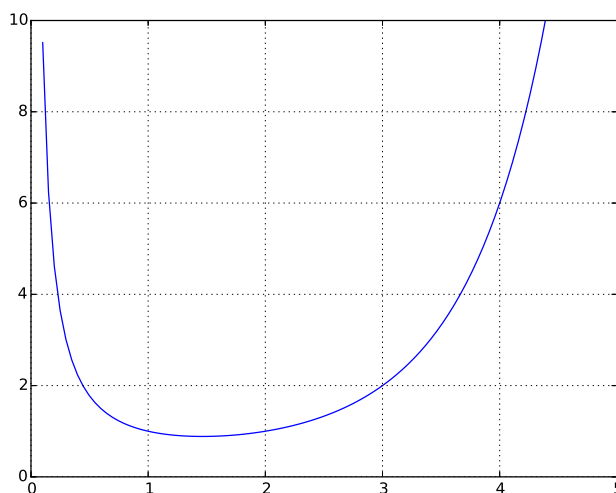


FIGURE 10 – Tracé de la fonction Γ

Remarque : On peut établir la stricte croissance mais dans ce cas, il faut nier le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'espace E des fonctions continues de carré intégrable sur $I =]0; +\infty[$ muni du produit scalaire

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) \, dt$$

L'ensemble E est bien stable par combinaison linéaire en utilisant l'inégalité

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad (f + g)^2 \leq 2(f^2 + g^2)$$

et l'intégrale définissant le produit scalaire converge car

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad |fg| \leq \frac{f^2 + g^2}{2}$$

On conclut comme précédemment en considérant

$$f : t \in I \mapsto \ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{et} \quad g : t \in I \mapsto t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}$$

La famille (f, g) étant libre, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à f et g est stricte.