

Corrigé du devoir en temps libre n°1

Problème I

1. Pour $t \in [0; \pi]$, on a

$$1 - 2x \cos(t) + x^2 \geq 1 - 2x + x^2 = (x - 1)^2 > 0$$

puisque $x \in]1; +\infty[$. Par suite, la fonction $t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2)$ est continue sur le segment $[0; \pi]$ d'où

L'intégrale $J(x)$ est bien définie.

2. Avec le changement d'indices $k = 2n - \ell \iff \ell = 2n - k$, on a $\ell \in \llbracket n + 1; 2n \rrbracket$ et

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n} \left(x - e^{-\frac{i\pi(2\ell-n)}{n}} \right) = \prod_{\ell=n+1}^{2n} \left(x - e^{\frac{i\pi\ell}{n}} \underbrace{e^{-2i\pi}}_{=1} \right)$$

En remarquant

$$x - e^{\frac{i\pi}{n}} = x + 1 \quad \text{et} \quad x - e^{\frac{2i\pi}{n}} = x - 1$$

il vient

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}} \right) = \frac{x-1}{x+1} \prod_{k=n}^{2n-1} \left(x - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right)$$

3. Pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a

$$1 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2 = \left(x - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)$$

d'où
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2 \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left[\left(x - e^{\frac{ik\pi}{n}}\right) \left(x - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right) \right]$$

D'après le résultat de la question précédente, on trouve

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2 \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right) \times \frac{x-1}{x+1} \prod_{k=n}^{2n-1} \left(x - e^{\frac{ik\pi}{n}} \right)$$

Ainsi

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2 \right) = \frac{x-1}{x+1} \prod_{k=0}^{2n-1} \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{2n}} \right)$$

4. D'après le théorème de convergence d'une somme de Riemann appliqué à la fonction continue $t \mapsto \ln(1 - 2x \cos(t) + x^2)$, on a

$$J(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(1 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2x \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + x^2 \right) \right)$$

Avec le résultat de la question précédente, il s'ensuit

$$J(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \prod_{k=0}^{2n-1} \left(x - e^{\frac{2ik\pi}{2n}} \right) \right)$$

Par conséquent

$$J(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{(x^{2n} - 1)(x - 1)}{x + 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
5. \text{ On a } \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{(x^{2n} - 1)(x - 1)}{x + 1} \right) &= \frac{\pi}{n} \ln(x^{2n}(1 - x^{-2n})) + \underbrace{\frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{x - 1}{x + 1} \right)}_{=o(1)} \\
&= \frac{\pi}{n} (2n \ln(x) + \ln(1 - x^{-2n}) + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi \ln(x)
\end{aligned}$$

On conclut

$$\boxed{J(x) = 2\pi \ln(x)}$$

Problème II

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)^2}{t^2}$ est continue sur $]0; +\infty[$ avec

$$\frac{\sin(t)^2}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin(t)^2}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Il s'ensuit que la fonction f est prolongeable par continuité donc intégrable sur $]0; 1]$ et intégrable sur $[1; +\infty[$ par comparaison et critère de Riemann. Ainsi

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt \text{ converge.}}$$

2. Les fonctions $t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Le crochet $\left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_0^{+\infty}$ est fini car

$$\frac{1 - \cos(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{o(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

sont de même nature. Or, on a

$$\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

d'où la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ (faussement impropre en 0 puis comparaison et critère de Riemann sur $[1; +\infty[$). Il s'ensuit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \underbrace{\left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin(t/2)^2}{t^2} dt$$

Un dernier changement de variable $t = 2u$ permet de conclure

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \text{ converge et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t^2} dt.}$$

3.(a) Chaque intégrale est une intégrale de fonctions continues sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ ou $]0; \frac{\pi}{2}[$ qui sont toutes prolongeables par continuité en la ou les bornes ouvertes d'où

$$\boxed{\text{Les intégrales définissant } I_n, A_n \text{ et } B_n \text{ convergent.}}$$

Par une étude de fonctions ou concavité de $\sin$ et convexité de $\tan$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$, on obtient

$$\forall t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\quad \sin(t) \leq t \leq \tan(t) \implies \frac{\sin(nt)^2}{\tan(t)^2} \leq \frac{\sin(nt)^2}{t^2} \leq \frac{\sin(nt)^2}{\sin(t)^2}$$

Par comparaison puisque les intégrales convergent, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n \leq I_n \leq A_n}$$

Remarque : La convergence de A_n prouve, par comparaison, la convergence de I_n et B_n puisqu'il s'agit d'intégrales de fonctions positives.

3.(b) Par linéarité de l'intégrale (car convergence), on a

$$\begin{aligned} \Delta_n &= A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(t)^2} [\sin(nt)^2 - 2\sin((n+1)t)^2 + \sin((n+2)t)^2] dt \end{aligned}$$

Par linéarisation, on a

$$\sin(nt)^2 - 2\sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) = \frac{1}{2} [2\cos(2(n+1)t) - \cos(2nt) - \cos(2(n+2)t)]$$

Par trigonométrie, on sait

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Ainsi

$$2\cos(2(n+1)t) - \cos(2nt) - \cos(2(n+2)t) = 2\cos(2(n+1)t) - 2\cos(2t)\cos(2(n+1)t)$$

Par suite

$$\Delta_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(2(n+1)t) \frac{1 - \cos(2t)}{2\sin(t)^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2n+2)t) dt = 0$$

D'autre part, pour $n \geq 1$ (on a $A_0 = B_0 = 0$) :

$$A_n - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)^2 \left(\frac{1}{\sin(t)^2} - \frac{\cos^2 t}{\sin(t)^2} \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nt)^2 dt$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad A_n - B_n = \frac{\pi}{4}}$$

Variante : D'autres stratégies sont possibles pour $A_n + A_{n+1} - 2A_{n+1}$. On peut utiliser

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \sin(a)^2 - \sin(b)^2 = \sin(a-b)\sin(a+b)$$

On peut aussi « symétriser » l'intégrande en écrivant $n = n+1-1$ et $n+2 = n+1+1$ puis développer par trigonométrie.

3.(c) On a $A_n - A_{n+1} = A_{n+1} - A_{n+2}$, d'où $(A_n)_n$ est arithmétique. Avec $A_0 = 0$ et $A_1 = \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad A_n = \frac{n\pi}{2} \quad \text{et} \quad B_n = \frac{(2n-1)\pi}{4}}$$

3.(d) On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{(2n-1)\pi}{4n} \leq \frac{I_n}{n} \leq \frac{\pi}{2}$$

Avec le changement de variable $u = nt$ dans I_n , on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{I_n}{n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(u)^2}{u^2} du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)^2}{u^2} du$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{I_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)^2}{u^2} du = \frac{\pi}{2}}$$

Problème III

La fonction f_α est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$. Pour $\alpha > 1$, on a $\left| \frac{\sin(t)}{t^\alpha} \right| \leq \frac{1}{t^\alpha}$ d'où l'intégrabilité de f_α sur $[1; +\infty[$. Pour $\alpha \in]0; 1]$, on procède en intégrant par parties. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; +\infty[$ et

$$-\frac{\cos(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} -\cos(1) \quad -\frac{\cos(t)}{t^\alpha} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\alpha \cos(t)}{t^{\alpha+1}} dt$$

sont de même nature. Or, la seconde converge absolument puisque $1 + \alpha > 1$ et la convergence de $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t) dt$ s'ensuit. Par ailleurs, on a

$$\forall t \geq 1 \quad \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} \geq \frac{\sin(t)^2}{t^\alpha} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t^\alpha}$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t^\alpha} dt$ converge par un argument similaire à précédemment avec une intégration par parties et un raisonnement par l'absurde garantit que $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{2t^\alpha} dt$ diverge. Par comparaison, on conclut que la fonction f_α n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$. Supposons enfin $\alpha \leq 0$. En observant $t^{-\alpha} \geq 1$ pour $t \geq 1$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} t^{-\alpha} \sin(t) dt \geq \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(t) dt = 2$$

Si $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t) dt$ était convergente, on aurait

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f_\alpha(t) dt = \int_1^{(2n+1)\pi} f_\alpha(t) dt - \int_1^{2n\pi} f_\alpha(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

ce qui contredit la minoration précédente. Ainsi

L'intégrale $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t) dt$ converge absolument pour $\alpha > 1$, converge mais pas absolument pour $\alpha \in]0; 1]$ et diverge pour $\alpha \leq 0$.