

Devoir en temps libre n°2

Problème I

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$$

1. Montrer que F est définie, continue sur $]0; +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer les limites de F et F' en $+\infty$.
3. Exprimer F'' sur $]0; +\infty[$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

4. Montrer

$$\begin{cases} \forall x > 0 & F(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \\ F(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Problème II

On pose
$$\forall x \in [-1; 1] \quad F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + x \cos(t))}{\cos(t)} dt$$

1. Montrer que F est définie, continue sur $[-1; 1]$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1; 1]$.

3. Établir
$$\forall x \in [-1; 1] \quad F(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\operatorname{Arccos}(x)^2}{2}$$