

TD 2 : Référentiels non galiléens

Exercice 1: Force de Coriolis sur un train (★)

Un train à grande vitesse, de masse $m = 7,8 \times 10^5 \text{ kg}$, circule du nord vers le sud entre Paris et Poitiers à la vitesse constante $v = 300 \text{ km h}^{-1}$; à l'instant considéré, il se trouve à la hauteur de Ports-sur-Vienne, à la latitude $\lambda = 47^\circ \text{ nord}$. Au point P où se situe le train, on définit une base orthonormée $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec $\vec{e}_x$ vers l'est, $\vec{e}_y$ vers le nord et $\vec{e}_z$ vers le zénith.

1. Faire un schéma où apparaissent la Terre (en coupe), la base ci-dessus au point P, le vecteur vitesse du train et le vecteur rotation de la Terre $\vec{\Omega}$.
2. Déterminer la force de Coriolis qui s'exerce sur le train dans le référentiel terrestre et comparer sa norme à celle du poids du train. On donne $\Omega = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$; $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.
3. Faire un schéma local du train, vu de l'arrière, et représenter les différentes forces subies. Lequel des deux rails s'use le plus? Qu'est-ce qui change quand le train va vers le nord?

Exercice 2: "Il pleut" (★)

En roulant sous la pluie à 100 km h^{-1} sur une portion d'autoroute droite, le conducteur "remarque" que les gouttes de pluie font un angle de 80° avec la verticale. À l'arrêt, il remarque qu'en fait, la pluie tombe verticalement.

1. Calculer la vitesse de la pluie par rapport à la voiture immobile et par rapport à la voiture roulant à 100 km h^{-1} .

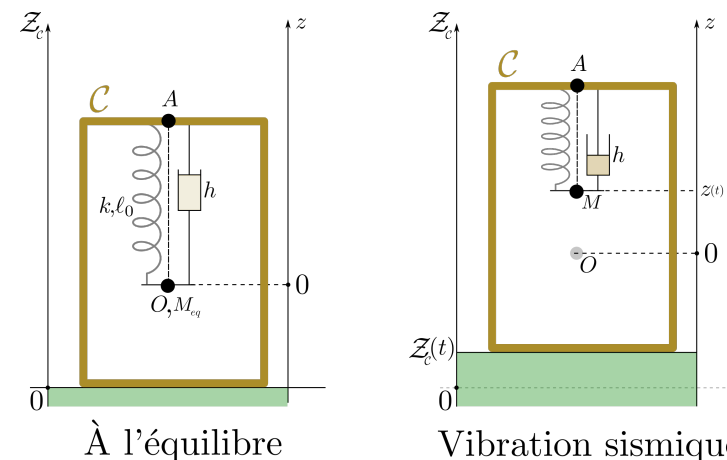
Exercice 3: Pesanteur apparente (★)

Dans le cadre d'une expérience, un physicien de masse $m = 70 \text{ kg}$ emporte un pèse-personne dans un ascenseur qui monte.

1. Le pèse-personne affiche successivement 90 kg, 70 kg puis 50 kg. Que peut-on en déduire sur le mouvement de l'ascenseur aux instants considérés?
2. Qu'afficherait le pèse-personne si les câbles retenant l'ascenseur cédaient?

Exercice 4: Sismographe (★★)

Soit le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen et un sismographe formé d'un cadre solide $\mathcal{C}$ et d'un point matériel mobile M de masse m , relié au cadre par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Le mobile subit une force de frottement fluide lors de son mouvement. Cette force fluide, modélisée par un amortisseur fluide, est proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport au référentiel cadre $\mathcal{R}_C$: $\vec{f} = -h\vec{v}_r$.



Le cadre est, lors d'une vibration sismique du sol, mis en mouvement : le mouvement vertical du cadre est caractérisé par $Z_c(t) = Z_0 \cos(\omega t)$ où Z_0 est l'amplitude de l'onde sismique et ω_0 sa pulsation.

On note g l'accélération de la pesanteur.

On note $z(t) = OM(t)$ le déplacement vertical de la masse M mesurée relativement au cadre; l'origine de l'axe (Oz) est la position de M_{eq} de M en l'absence d'onde sismique.

1. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre en fonction de sa longueur à vide ℓ_0 , de sa raideur k et de la masse m .
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}_C$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
3. À quelle condition le régime transitoire associé est-il critique? On se placera dans ce cas dans la suite et on posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Quel est l'intérêt de ce choix?
4. Déterminer la réponse $z(t)$ en régime harmonique forcé.
5. Tracer les diagrammes de Bode correspondants. À quelle condition l'appareil fournit-il une mesure fiable de l'amplitude de l'onde sismique? Commenter.

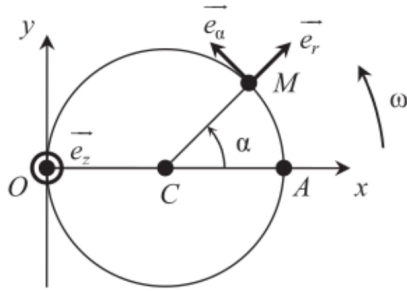
Exercice 5: Oscillations en référentiel tournant (★★)

Un anneau circulaire horizontal, de centre C et de rayon r , est soudé en un point O à une tige verticale, confondue avec l'axe (Oz) du référentiel terrestre ($\mathcal{R}_T$) supposé galiléen.

À partir de l'instant $t = 0$, on fait tourner cet anneau par rapport à $(\mathcal{R}_T)$, à la vitesse angulaire ω constante, autour de (Oz) . Une perle de masse m , assimilable à un point matériel M , peut coulisser sans frottement sur l'anneau; on note α l'angle entre OC et

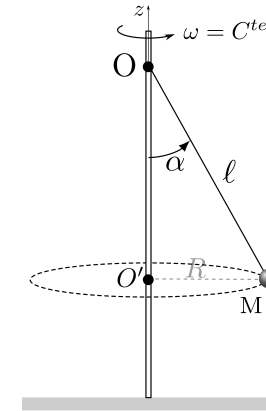
CM. À $t = 0^+$, M se trouve au point A (tel que $\alpha = 0$), et sa vitesse par rapport à (R_T) est encore nulle.

On note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ l'accélération de la pesanteur.



1. (a) Le référentiel (R) lié à l'anneau est-il galiléen ?
 (b) Faire la liste complète des forces qui s'exercent sur M dans (R) , et donner les composantes de ces forces dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z)$.
 On pourra utiliser : $\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM}$.
2. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour M dans ce référentiel, et en déduire que l'équation différentielle vérifiée par $\alpha(t)$ est de la forme : $\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin(\alpha) = 0$.
3. (a) Déterminer les positions d'équilibre de M dans (R) .
 (b) Préciser leur stabilité en utilisant l'équation différentielle précédente.
4. (a) On suppose maintenant $\alpha \ll 1$ (petites oscillations). Déterminer alors complètement la solution $\alpha(t)$ en tenant compte des conditions initiales.
 (b) Montrer que la solution trouvée est en réalité incompatible avec l'hypothèse des petites oscillations. A-t-on surestimé ou sous-estimé $\sin(\alpha)$ (en valeur absolue) ? En déduire si l'amplitude réelle des oscillations est plus grande ou plus petite que celle calculée à la question précédente.
5. (a) Exprimer l'énergie potentielle totale et l'énergie cinétique de M dans (R) , en fonction de α , $\dot{\alpha}$ et des paramètres du système.
 (b) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, retrouver l'équation différentielle précédente.

Exercice 6: Pendule conique (**)



Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur ℓ accroché au point fixe O et auquel est suspendu un mobile M de masse m . Le pendule tourne à la vitesse angulaire constante ω constante autour de l'axe $\Delta = (O, \vec{e}_z)$ et M est en mouvement circulaire uniforme de rayon $R > 0$ autour de l'axe Oz avec la même pulsation.

1. Dans quel référentiel le mobile M est-il à l'équilibre ?
2. Faire le bilan des forces dans ce référentiel et préciser, pour chacune d'entre elles, si elle est conservative. Le cas échéant, expliciter l'énergie potentielle associée en fonction de l'angle α entre la verticale et le fil.
3. Dans cette situation, quelle valeur doit forcément prendre la vitesse angulaire ω en fonction de g , l et R .

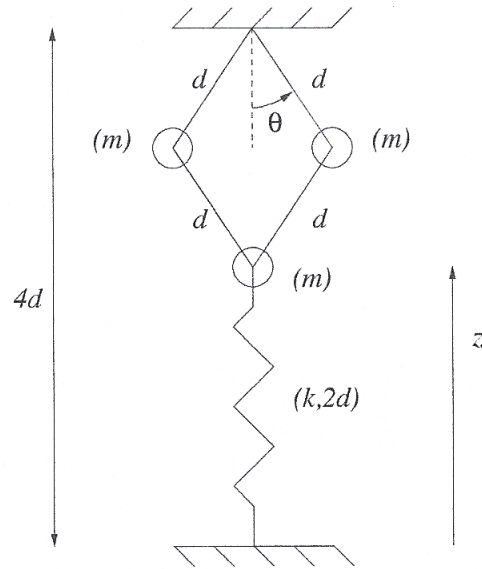
Exercice 7: Régulateur à boules (**)

Dans le dispositif suivant, les diverses tiges ont une longueur d et une masse négligeable. Les trois billes ont une masse m . Le ressort a une constante de raideur k et une longueur à vide $2d$. Le système tourne à vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe vertical passant par le ressort.

On admet l'expression de l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement :

$$E_{pie} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 H M^2$$

où H est le projeté de M sur l'axe.



1. Déterminer l'énergie potentielle E_p du régulateur à boules en fonction de θ .
2. En déduire la ou les valeurs de θ à l'équilibre.

Exercice 8: Navette spatiale (★★)

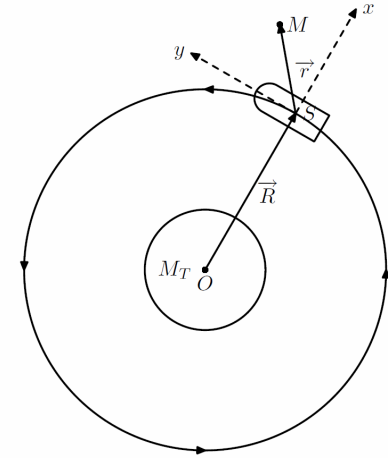
Une station spatiale est sur une orbite circulaire autour de la Terre. Son mouvement est étudié dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0$, d'origine O considéré comme galiléen. La station est, dans cette partie, assimilée à un point S de masse M_S , repéré par le rayon vecteur $\vec{R} = \vec{OS}$.

1. Énoncer le principe d'inertie. Définir le référentiel géocentrique. Sur quelle échelle de temps ce référentiel peut-il être considéré comme approximativement galiléen ?
2. Définir le moment cinétique $\vec{L}$ de la station S par rapport à l'origine O du référentiel. Montrer que ce vecteur est une constante du mouvement.
3. Déduire que le mouvement du satellite s'effectue dans un plan que l'on définira.
4. Montrer que le mouvement circulaire du satellite s'effectue avec un vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constant et dirigé suivant $\vec{L}$.
5. Exprimer ω en fonction de la masse de la Terre M_T , de la constante de gravitation universelle G et du rayon R .

La station spatiale est en rotation synchrone autour de la Terre. Elle tourne sur elle-même avec un vecteur vitesse angulaire identique à celui de son mouvement orbital ω .

On désigne par $\mathcal{R}$ le référentiel lié à la station. L'origine de ce référentiel est située au centre de masse S de la station. L'axe Sx est dirigé suivant $\vec{R}$, l'axe Sz est porté par le moment cinétique $\vec{L}$ et l'axe Sy complète le trièdre orthonormé.

Dans ce référentiel, un corps ponctuel M , de masse m , est en mouvement dans le plan Sxy . Il est repéré dans la station par le vecteur $\vec{r} = \vec{SM}$.



6. Exprimer l'accélération d'entraînement $\vec{a}_e(M)$ en fonction de $\vec{r}$, $\vec{R}$ et ω . En déduire la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_e$ exercée sur la masse m dans $\mathcal{R}$.
7. Si la particule M est animée d'une vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$, quelle force d'inertie supplémentaire lui est appliquée ? Exprimer cette force en fonction de m , $\vec{\omega}$ et $\vec{v}$.

La particule se trouvant dans le voisinage proche de la station, l'inégalité $r \ll R$ sera toujours vérifiée dans la suite du problème.

8. A l'aide d'un développement limité au premier ordre en r/R , montrer que la force d'attraction gravitationnelle qu'exerce la Terre sur le corps M s'écrit :

$$\vec{F} = -m\omega^2(\vec{R} + \vec{r} - 3x\vec{u}_x)$$

où $\vec{u}_x$ est le vecteur unitaire porté par l'axe Sx et (x, y) sont les coordonnées de $\vec{r}$ dans $\mathcal{R}$.

9. Le corps M est une balle qu'un cosmonaute lance en direction de la Terre avec une vitesse relative $\vec{v}_0 = -v_0\vec{u}_x$ ($v_0 \ll \omega R$) dans $\mathcal{R}$ depuis l'origine S de ce référentiel. Établir l'équation du mouvement dans $\mathcal{R}$ de la balle sous la forme de deux équations différentielles pour les variables x et y .
10. Intégrer ces équations et montrer que la trajectoire suivie est une ellipse. Il est conseillé d'exprimer d'abord $\dot{y}$ en fonction de x .

Exercice 9: Tir balistique (*)**

On note $\mathcal{R}_g$ le référentiel géocentrique, supposé galiléen. On note $\mathcal{R}_T$ le référentiel terrestre en rotation par rapport à $\mathcal{R}_g$.

Le vecteur rotation de $\mathcal{R}_T$ par rapport à $\mathcal{R}_g$ est noté $\vec{\Omega}$, suivant l'axe des pôles avec $\Omega = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$. En un lieu A de latitude $\lambda = 35^\circ$, un canon tire un obus à la vitesse $v_0 = 1000 \text{ m.s}^{-1}$, vers le nord, avec un angle $\alpha = 45^\circ$ par rapport à l'horizontale.

On désigne par $Axyz$ un repère orthonormé lié à la Terre, Ax étant dirigé vers l'est, Ay vers le nord et Az selon la verticale locale. On ne tient pas compte de la résistance de l'air et de la variation de g avec l'altitude. On prendra $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$. On néglige la variation de latitude au cours du mouvement.

1. Exprimer $\vec{\Omega}$ dans le repère $Axyz$.
2. Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}_T$. La projeter sur le repère $Axyz$.
3. Intégrer une fois l'équation en $\ddot{z}$ et celle en $\ddot{y}$. En déduire que l'équation complète selon Ax est :

$$\ddot{x} = -4\Omega^2 x + 2\Omega \cos(\lambda)gt - 2v_0\Omega \sin(\alpha) \cos(\lambda) + 2v_0\Omega \cos(\alpha) \sin(\lambda)$$

4. La durée du mouvement est de l'ordre de la minute et la déviation x de l'ordre de la centaine de mètres. Donner une estimation numérique de chacun des termes du membre de droite de l'équation précédente. En déduire une expression approchée de $\ddot{x}$ puis de x à la date t .
5. Déterminer une expression approchée de $\dot{z}$ puis de z à la date t . Déterminer l'instant de retour au sol. Application numérique.
6. Déterminer la déviation de l'obus selon Ax . Effectuer l'application numérique.
7. On entend souvent la remarque selon laquelle un projectile dévie vers la droite dans l'hémisphère nord. Est-ce vrai ?

Éléments de réponses :**Exercice 1**

Q2 : $\frac{f_{ic}}{P} = \frac{2v\Omega \sin(\lambda)}{g} = 8,8 \times 10^{-4}$

Q3 : La somme des réactions exercées par le rail sur les roues selon $\vec{e}_x$ orientée vers l'est $T_{xg} + T_{xd} = f_{ic} = 2mv\Omega \sin(\lambda) > 0$. Donc la roue exerce sur les rails une force orientée vers l'ouest.

Exercice 2

Q1 : On trouve donc que la goutte chute à une vitesse de 18 km h^{-1} .

Exercice 4

Q2 : $\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$

Q4 : $z(t) = \frac{Z_0\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2}} \cos(\omega t + \phi)$ avec $\tan(\phi) = -\frac{2\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Exercice 5

Q1 : $\alpha(t) = -2 \sin(\omega t)$

Q1 : $E_p = -m\omega^2 r^2(1 + \cos(\alpha)) + cte$ et $E_c = \frac{1}{2}mr^2\dot{\alpha}^2$

Exercice 6

Q2 : L'énergie potentielle totale est $E_p = -mgl \cos(\alpha) - \frac{1}{2}m\omega^2 \ell^2 \sin^2(\alpha) + Cte$

Q3 : $\alpha_e = \arccos\left(\frac{g}{\ell\omega^2}\right)$

Exercice 7

Q1 : $E_p(\theta) = 2d \left[6mg + kd - \frac{1}{2}m\Omega^2 d - (2mg + kd) \cos(\theta) + \left(kd + \frac{1}{2}m\Omega^2 d \right) \cos^2(\theta) \right]$

Q2 : $\sin(\theta) = 0$ ou $\cos(\theta) = \frac{2mg + kd}{m\Omega^2 d + 2kd}$

Exercice 8

Q6 : $\vec{f}_{ie} = m\omega^2(\vec{R} + \vec{r})$

Q9 : $\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + 3\omega^2 x$ et $\ddot{y} = -2\omega\dot{x}$

Q10 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$; $a = \frac{v_0}{\omega}$; $y_0 = b = \frac{2v_0}{\omega}$

Exercice 9

Q2 : $m\ddot{x} = -2m\Omega(\cos(\lambda)\dot{z} - \sin(\lambda)\dot{y})$; $m\ddot{y} = -2m\Omega \sin(\lambda)\dot{x}$ et $m\ddot{z} = -mg + 2m\Omega \cos(\lambda)\dot{x}$

Q4 : $x = \frac{1}{3}\Omega \cos(\lambda)gt^3 + v_0\Omega(\cos(\alpha)\sin(\lambda) - \sin(\alpha)\cos(\lambda))t^2$

Q5 : $t_s = 144 \text{ s}$