DM01 : Électrocinétique et induction (Temps indicatif 2h30)

Remarques par question

— Q1 : Dans la modélisation, le mouvement de la corde est représenté par le mouvement de l'aimant. Il y a un mouvement relatif du circuit (la bobine) par rapport à l'aimant qui produit un champ stationnaire : il s'agit d'induction de Lorentz !
On rappelle que l'induction engendre une force électromotrice cause éventuelle d'un courant induit. Ce n'est pas le courant induit qui engendre une fem d'induction.

— Q3 et Q4 : Il faut définir $z(t)$ et $\dot{z}(t)$ et raisonner en ordre de grandeur. Afin de faire l'étude harmonique dans la suite, il est nécessaire de justifier la quasi-linéarité de $e(t)$, i.e. $e(t) \approx K\cos(\omega t + \phi)$, avec K une constante.

— Q9 : Il faut établir les équations des asymptotes et préciser la valeur en ω_0.

— Q12 : On demande uniquement le gain statique, i.e. $G(\omega \to 0)$. Il suffit de travailler sur le circuit équivalent BF.

— Q15, Q16 et Q17 : Il faut toujours préciser les valeurs lues graphiquement. Dans une AN, poser le calcul sur la copie avec les valeurs numériques.

Exercice 1: La guitare électrique ***(CCS MPI 2024)***

1.1 Microphone : étude du mouvement vertical

1. L'aimant en mouvement crée un **champ magnétique variable** temporellement au niveau de la bobine. Le flux du champ magnétique à travers la spire dépend donc du temps, d'où l'apparition d'une force électromotrice d'après la loi de Faraday :
$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}$$

2. On applique la loi de Faraday
$$\boxed{e = -N\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{3N\mu_0 MR^2}{2(R^2+z^2)^{5/2}}\, z\dot{z}}$$

3. Comme $z(t) = \overline{z} + z_0\cos(2\pi ft)$, on a $\dot{z} = -2\pi z_0 f\sin(2\pi ft)$.
En ordre de grandeur, on a
$$e \approx \frac{3N\mu_0 MR^2}{2(R^2+(\overline{z})^2)^{5/2}}\,\overline{z}\times 2\pi z_0 f$$
L'AN donne $\boxed{e \approx 100\,\mathrm{mV}}$.

4. Il faut regarder si $e(t)$ est une fonction sinusoïdale de fréquence f.
Tout d'abord, regardons le dénominateur :
$$R^2+z^2 = R^2\left(1+\underbrace{\frac{\overline{z}^2}{R^2}}_{1/4}+\underbrace{\frac{z_0^2}{R^2}}_{1/100}\cos(2\pi ft)+\underbrace{\frac{2\overline{z}z_0}{R^2}}_{1/10}\cos(2\pi ft)\right)$$
On peut alors écrire $\boxed{R^2+z^2 \approx \frac{5}{4}R^2 = \text{cste}}$.
Regardons maintenant le numérateur :
$$z\dot{z} = -2\pi f z_0\overline{z}\sin(2\pi ft) - 2\pi f z_0^2\cos(2\pi ft)\sin(2\pi ft)$$
$$-2\pi f z_0\overline{z}\left(\sin(2\pi ft)+\underbrace{\frac{z_0}{2\overline{z}}}_{1/10}\sin(4\pi ft)\right)$$

Donc $\boxed{z\dot{z} \approx -2\pi f z_0 \overline{z} \sin(2\pi f t)}$.

On en déduit que $e(t)$ est bien quasi-sinusoïdale à la fréquence f. Donc on peut considérer que la réponse du micro est linéaire.

1.2 Aspect électrique

5. À basses fréquences, la bobine et le condensateur se comportent respectivement comme un fil et un interrupteur ouvert. Il vient $\lim_{\omega\to 0} s(t) = e(t)$.
   À hautes fréquences, la bobine et le condensateur se comportent respectivement comme un interrupteur ouvert et comme un fil. Il vient $\lim_{\omega\to+\infty} s(t) = 0$.
   On peut conclure que le filtre est du type **passe-bas**.

6. La fonction de transfert du micro est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

   d'où

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}}.$$

7. On identifie les différentes grandeurs en comparant l'expression de la fonction de transfert trouvée précédemment avec la forme canonique donnée dans l'énoncé. On obtient

$$H_0 = 1, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad RC = \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{\sqrt{LC}}{Q}.$$

   Ainsi

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

8. En régime sinusoïdal forcé, pour un signal d'entrée $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, le signal de sortie est de la forme $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Son amplitude vaut

$$S_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}.$$

   Il faut donc minimiser la quantité

$$f(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}.$$

   On exprime la dérivée :

$$f'(\omega) = \frac{2\omega}{\omega_0^2}\left(\frac{1}{Q^2} - 2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\right)$$

   Sa dérivée si $Q > 1/\sqrt{2}$ s'annule pour

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

   Comme $f(\omega)$ est une somme de termes positifs et tend vers l'infini lorsque $\omega \to \pm\infty$, cet extremum est bien un minimum. Une résonance apparaît donc si

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}, \qquad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

9. Le gain en décibel vaut

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20\log\left(\frac{S_0(\omega)}{E_0}\right) = -10\log\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right].$$

Pour $\omega \ll \omega_0$,

$$G_{\text{dB}}(\omega) \simeq 0,$$

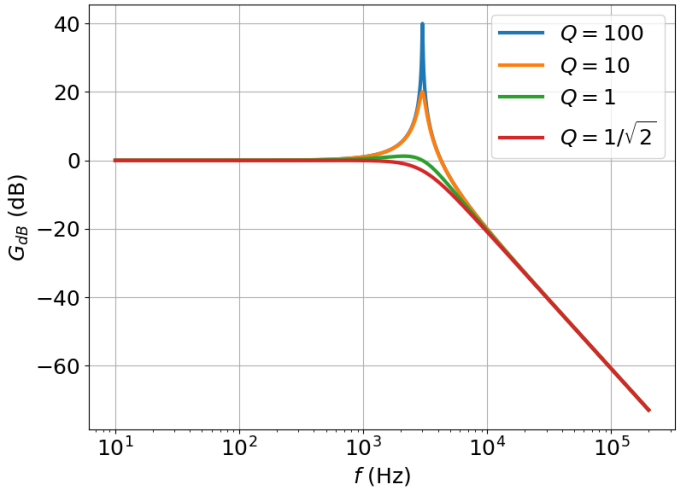
ce qui donne une asymptote horizontale.
À $\omega = \omega_0$,

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_0) = 20\log Q}.$$

Pour $\omega \gg \omega_0$,

$$G_{\text{dB}}(\omega) \simeq -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

ce qui correspond à une pente de $-40\,\text{dB/dec}$.
Le diagramme présente donc un pic de résonance autour de ω_r, suivi d'une décroissance à haute fréquence.



10. On peut tracer expérimentalement un diagramme de Bode en mesurant à l'aide d'un oscilloscope la variation de la valeur de l'amplitude du signal de sortie d'un filtre par rapport à l'amplitude du signal d'entrée en fonction de la variation de la fréquence imposée par le signal d'entrée.

11. La seule tension que l'on peut mesurer expérimentalement est la tension $s(t)$ en sortie du microphone, la force électromotrice $e(t)$ n'est pas accessible. Il est donc impossible de tracer le diagramme de Bode du micro de guitare.

12. Le gain statique est le gain à basse fréquence. Le circuit équivalent à BF est l'association en série des résistances R et r. Donc par application d'un pont diviseur de tension, on a

$$\boxed{H_0 = \frac{r}{r+R} = \frac{1}{1+R/r}}.$$

Ainsi, en augmentant la valeur de r, le gain statique augmente : le guitariste augmente donc le volume du son émis par la guitare. On notera que cette résistance influence aussi la valeur de la fréquence de coupure du filtre passe-bas.

13. D'après la loi d'association des impédances en parallèle,

$$\underline{Z} = \frac{(R+jL\omega)/(jC\omega)}{R+jL\omega+1/(jC\omega)} = \frac{R+j\omega L}{1-\omega^2LC+j\omega RC}.$$

14. Les deux dipôles sont en série, ainsi

$$\underline{i} = \frac{\underline{U}_r}{r} = \frac{\underline{U}_Z}{\underline{Z}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\underline{Z} = r\frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_r}}.$$

15. À basses fréquences,

$$1 \gg \omega^2 LC, \qquad 1 \gg \omega RC, \qquad R \gg \omega L.$$

Ainsi

$$\underline{Z} = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \simeq R.$$

D'après la question précédente, $R \simeq r\frac{|\underline{U}_Z|}{|\underline{U}_r|}$.
On lit approximativement

$$R_{\text{Fender}} \simeq r \times 1,5, \qquad R_{\text{Dynasonic}} \simeq r \times 0,7.$$

Avec $r = 10\,\text{k}\Omega$,

$$\boxed{R_{\text{Fender}} \simeq 15\,\text{k}\Omega}, \qquad \boxed{R_{\text{Dynasonic}} \simeq 7\,\text{k}\Omega}.$$

16. Si R et L dominent Z pour ces fréquences, le schéma électrique du micro peut être modélisé par un dipôle RL série uniquement. Il vient donc

$$Z \simeq R + j\omega L.$$

Ainsi, $|Z| = r\frac{|U_Z|}{|U_r|}$, et donc

$$R^2 + \omega^2 L^2 \simeq \left(r\frac{|\underline{U}_Z|}{|\underline{U}_r|}\right)^2.$$

On en déduit

$$L \simeq \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(r\frac{|\underline{U}_Z|}{|\underline{U}_r|}\right)^2 - R^2}.$$

À $f = 1\,\text{kHz}$, on lit les valeurs du rapport sur le graphe (6 pour Fender et 1,5 pour Dynasonic) et on obtient

$$\boxed{L_{\text{Fender}} \simeq 9\,\text{H}}, \qquad \boxed{L_{\text{Dynasonic}} \simeq 2\,\text{H}}.$$

17. Si $\omega \simeq \omega_0$ et $Q \gg 1$, on peut écrire

$$\underline{Z} \simeq R\frac{jQ\omega/\omega_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{RQ^2}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Il s'agit de la forme canonique d'un passe-bande dont la pulsation de résonance s'identifie à $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.
Le maximum du rapport $|U_Z|/|U_r|$ permet donc de lire expérimentalement la fréquence f_0 correspondant à la résonance. On en déduit

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 L f_0^2}.$$

Pour le micro Fender, on lit $f_0 \simeq 3\,\text{kHz}$ et $L \simeq 9\,\text{H}$:

$$\boxed{C_{\text{Fender}} \simeq 0{,}3\,\text{nF}}.$$

Pour le micro Dynasonic, on lit $f_0 \simeq 25\,\text{kHz}$ et $L \simeq 2\,\text{H}$:

$$\boxed{C_{\text{Dynasonic}} \simeq 0{,}02\,\text{nF}}.$$

Remarque : On aurait aussi pu utiliser la valeur maximale.

18. On constate que le micro Dynasonic présente une résonance étroite dans le domaine des ultrasons, à des fréquences supérieures à 20 kHz, alors que le micro Fender présente une résonance étroite dans la partie « aiguë » du domaine audible, à des fréquences supérieures à 2 kHz.
Cette résonance permet donc au micro Fender d'amplifier préférentiellement une certaine largeur de fréquences dans la partie supérieure du domaine audible, et donc de « sonner plus aigu que le micro Dynasonic ».

1.3 Numérisation et traitement du signal

19. A_0, A_1 et A_2 sont des ALI idéaux donc les intensités des courants en entrée des ALI sont nulles. On peut alors utiliser des ponts diviseur de tension pour exprimer V_0, V_1 et V_2 car les quatre résistances R sont en série.

$$\boxed{V_0 = \frac{R}{4R}V_{cc} = \frac{V_{cc}}{4}, \qquad V_1 = \frac{2R}{4R}V_{cc} = \frac{V_{cc}}{2}, \qquad V_2 = \frac{3R}{4R}V_{cc} = \frac{3V_{cc}}{4}.}$$

20. Chaque ALI se comporte comme un comparateur simple, donc

$$S_i = \begin{cases} +V_{cc} & \text{si} \quad V_e > V_i \\ -V_{cc} & \text{sinon} \end{cases}$$

	S_0	S_1	S_2
$0 < V_e < \frac{1}{4}V_{cc}$	0	0	0
$\frac{1}{4}V_{cc} < V_e < \frac{1}{2}V_{cc}$	1	0	0
$\frac{1}{2}V_{cc} < V_e < \frac{3}{4}V_{cc}$	1	1	0
$\frac{3}{4}V_{cc} < V_e < V_{cc}$	1	1	1

21.

	S_0	S_1	S_2	$b_1 = S_1$	b_2
$0 < V_e < \frac{1}{4}V_{cc}$	0	0	0	0	0
$\frac{1}{4}V_{cc} < V_e < \frac{1}{2}V_{cc}$	1	0	0	0	1
$\frac{1}{2}V_{cc} < V_e < \frac{3}{4}V_{cc}$	1	1	0	1	0
$\frac{3}{4}V_{cc} < V_e < V_{cc}$	1	1	1	1	1

22. Un convertisseur flash sur 2 bits permet d'avoir 4 nombres binaires différents. Le convertisseur flash a alors besoin de 3 amplificateurs linéaires intégrés pour couper l'intervalle de tension du signal analogique en 4.
Pour un convertisseur flash sur 24 bits, il faut donc

$$2^{24} - 1 = 16\,777\,215$$

amplificateurs linéaires intégrés.

23. L'ALI est idéal donc $i_+ = 0$, donc l'intensité traversant la résistance et la même que celle traversant le condensateur :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

On en déduit

$$V_e = Ri + u_c = RC\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + u_c$$

En supposant V_e constante sur la durée d'étude, la solution de cette équation différentielle du premier ordre est

$$u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + V_e, \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC.$$

Or, à $t = 0$, le condensateur est déchargé, donc $u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$, d'où $A = -V_e$:

$$\boxed{u_C(t) = V_e\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}.$$

On souhaite connaître le temps t_1 au bout duquel $u_C(t_1) = 0,99V_e$:

$$1 - e^{-t_1/\tau} = 0,99 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{t_1 = -\tau \ln(0,01) = 4,6\tau = 4,6RC}.$$

Pour que u_C diffère de V_e de moins de 1% à chaque front descendant, il faut que la demi-période d'échantillonnage $\dfrac{1}{2f_e}$ soit supérieure à $4,6RC$ donc approximativement :

$$\boxed{RC < \frac{1}{10f_e}}.$$

24. La rétroaction de l'ALI idéal est négative donc l'ALI fonctionne en régime linéaire. On a donc $V_s = V_- = V_+ = u_C$. De plus, l'ALI est idéal donc $i_+ = i_C = 0$. On obtient alors que

$$\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{V_s = u_C = \text{cste}}.$$

L'intérêt de l'échantillonneur bloqueur est de « prélever » un échantillon du signal analogique et de « bloquer » sa valeur pendant un certain temps.