DM02 : Mécanique (Temps indicatif 1h30 (+1h30))

Merci d'indiquer le temps passé à faire ce DM, ainsi que les aides éventuelles utilisées.

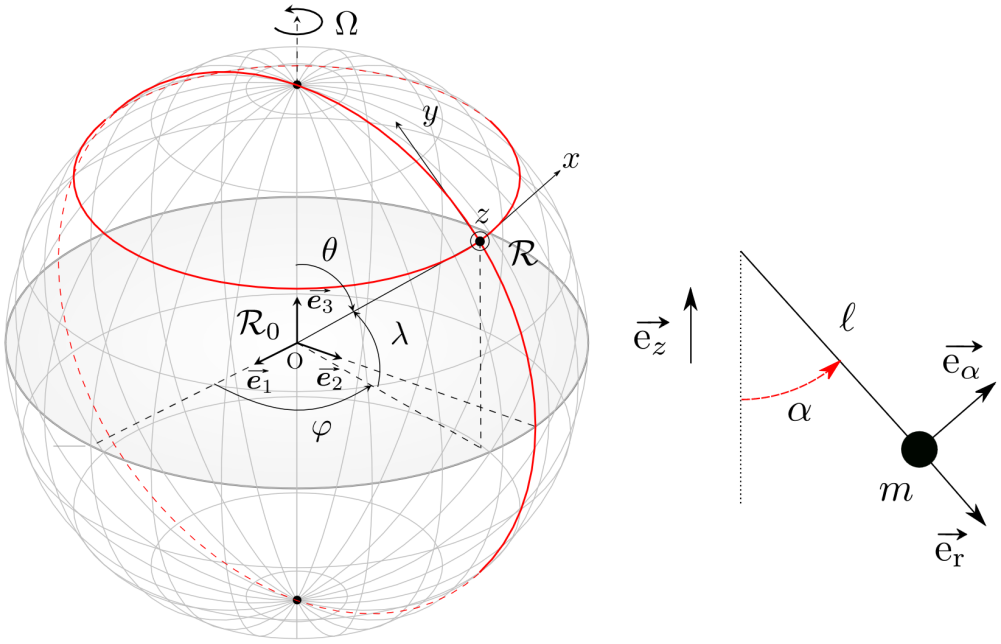
L'exercice 1 est obligatoire, l'exercice 2 est un exercice de révision de mécanique de sup. Il est facultatif.

Exercice 1: Pendule de Foucault

Le pendule de Foucault est un instrument historique qui a contribué à la mise en évidence de la rotation de la Terre sur elle-même. On le modélise par un fil de longueur $\ell = 67\,\text{m}$ de masse négligeable, au bout duquel est accrochée une masse $m = 36\,\text{kg}$.

La Terre est supposée en mouvement de rotation uniforme à la vitesse de rotation angulaire Ω. On néglige toutes les forces de frottement dans cette partie.

Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base fixe du référentiel géocentrique considéré galiléen (voir figure a). La position de la masse m est donnée par ses coordonnées dans le repère $(Oxyz)$ de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel terrestre. Cette base est dite locale. On note α l'angle entre le pendule et l'axe vertical dirigé par le vecteur $\vec{e}_z$ (voir figure b). On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha)$ la base mobile suivant le mouvement de la masse dans le référentiel terrestre.



(a) (b)

1.1 Mouvement du pendule sans effet de la force d'inertie de Coriolis

Dans un premier temps, on néglige la force d'inertie de Coriolis.

1. Dans toute la suite on négligera la force d'inertie d'entraînement, et on considérera que le poids est parallèle à l'axe Oz. Justifier ces approximations par une analyse en ordres de grandeur.
2. Écrire l'équation vectorielle du mouvement de la masse m, puis la projeter dans la base mobile $(\vec{e_r}, \vec{e_\alpha})$ définie sur la figure b (on supposera son mouvement plan).
3. Dans quelle limite le pendule simple peut-il être approximé par un oscillateur harmonique ? On se placera dans cette limite par la suite. Exprimer sa pulsation propre ω_0. Déterminer la période d'oscillation du pendule et l'estimer numériquement pour le pendule de Foucault.
4. Justifier que dans l'approximation précédente le mouvement de la masse est horizontal au premier ordre en α.

1.2 Effet de la force d'inertie de Coriolis

On s'intéresse maintenant à la modification du mouvement engendrée par la présence de la force d'inertie de Coriolis. Paris est située à une latitude $\lambda = 49$ ° comme définie sur la figure a. On considérera que le mouvement de la masse est plan dans le repère local et on négligera vitesse et accélération selon l'axe Oz. On admettra que l'effet des forces autres que la force de Coriolis se met sous la forme $\vec{F} = -m\omega_0^2 x\vec{e}_x - m\omega_0^2 y\vec{e}_y$.

5. Comparer numériquement les pulsations Ω et ω_0.
6. Décomposer le vecteur $\vec{e_3}$ dans la base locale et en déduire que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\tilde{\Omega}\dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\tilde{\Omega}\dot{x} \end{cases}$$

   Exprimer la constante $\tilde{\Omega}$.
7. Pour résoudre ce système, on pose la variable complexe $\underline{u} = x + iy$. Déterminer l'équation vérifiée par $\underline{u}$. Résoudre cette équation et donner l'expression de $\underline{u}(t)$ en fonction de deux inconnues $\underline{A}$ et $\underline{B}$.
8. On prend $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ et une vitesse initiale nulle. Déterminer l'expression de $\underline{u}$.
9. En utilisant le résultat de la question 5, simplifier l'expression de $\underline{u}(t)$. Interpréter l'expression obtenue.
10. Déterminer l'expression de l'angle ψ duquel a tourné le plan d'oscillation du pendule en 24 h à Paris dans le référentiel terrestre. L'estimer numériquement en degrés. Y a-t-il des points sur le globe où le plan d'oscillation du pendule reviendrait à sa position initiale après 24h ?
11. Justifier brièvement les valeurs inhabituelles choisies par Foucault pour la masse m et la longueur ℓ.
12. Sur la fiure suivante, on voit le professeur Tournesol utiliser son pendule pour se repérer et se diriger sur Terre. Cela vous semble-t-il possible ? Justifir votre réponse.



Exercice 2: Prédiction et mesure d'une partie des propriétés mécaniques de l'ADN

Lors de la réalisation d'un test PCR (Polymerase Chain Reaction), une portion d'ADN double brin est copiée (amplifiée) un très grand nombre de fois par une enzyme (la polymérase).

Toutes les séquences d'ADN double brin ne sont pas éligibles pour cette méthode. Les propriétés physiques de l'ADN dépendent de la séquence de paires de bases (nommées G, T, A ou C) et si la séquence que l'on souhaite copier donne lieu à un objet trop rigide le cheminement de la polymérase le long du morceau d'ADN risque de ne pas se dérouler correctement.

Ce sujet propose d'aborder les méthodes utilisées pour essayer de prédire ainsi que de mesurer une partie des propriétés mécaniques de l'ADN.

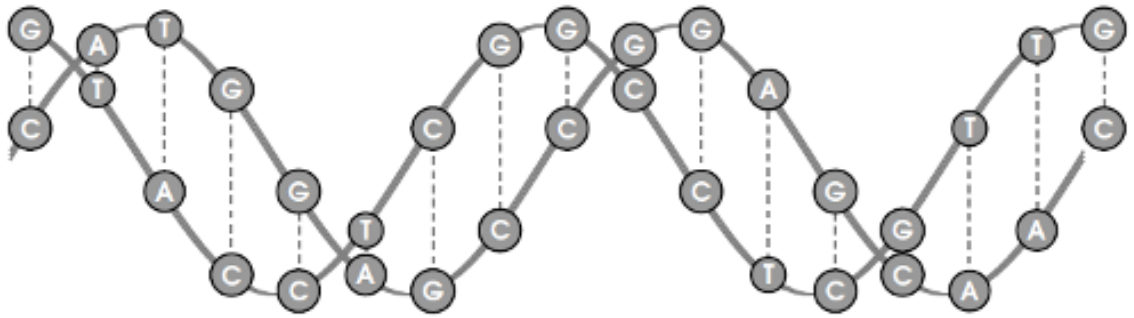


FIGURE 1 – Double hélice d'ADN. Chaque brin est constitué d'une séquence de paires de bases reliées par des liaisons covalentes (en gris). Les deux brins sont reliés par des liaisons hydrogène (en pointillé) qui sont moins résistantes que les liaisons covalentes.

1.3 Modèle naïf de l'élasticité de brins d'ADN courts (< 30 paires de bases)

On modélise d'abord un simple brin d'ADN pour une succession de bases reliées par des ressorts.

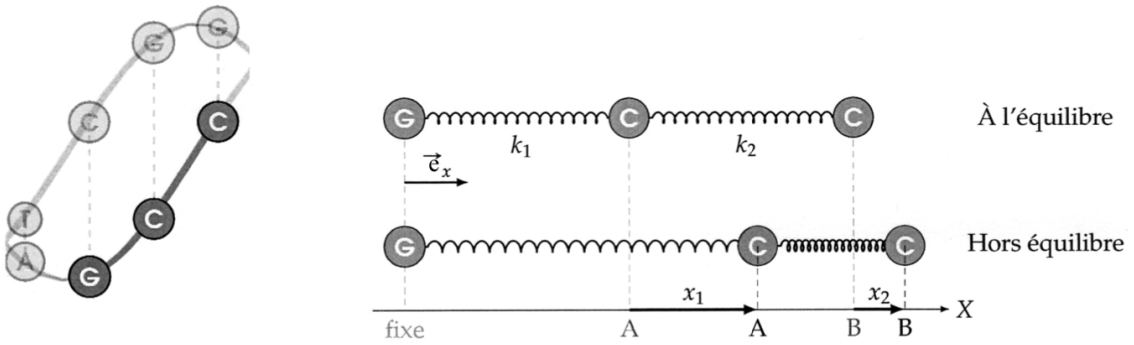


FIGURE 2 – Une portion d'un simple brin d'ADN (ici « G-C-C ») est modélisée par une succession de deux ressorts.

On repère le déplacement de A par rapport à sa position d'équilibre par x_1, et le déplacement de B par rapport à l'équilibre par x_2. On pourra considérer que la longueur à vide de ces ressorts est la longueur qui sépare les points A et B lorsqu'ils sont à l'équilibre, on note cette longueur l_0. La raideur d'une liaison covalente G-C est notée k_1 et celle d'une liaison C-C est notée k_2. Dans tout l'énoncé, les effets de la gravité sont négligés.

1. Les deux points (A et B) sont déplacés de leur position au repos. Faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur le point A. Donner leur expression vectorielle. Faire de même pour le point B. Donner vos réponses en fonction de x_1, x_2 et des paramètres de l'énoncé.

On tire sur le point B avec une force $\vec{F}_0 = F_0 \vec{e}_x$ jusqu'à ce que l'ensemble se retrouve dans une nouvelle position d'équilibre.

2. Montrer que tout se passe comme si le point B était attaché à l'origine via un unique ressort dont on donnera la raideur.

On suppose que les liaisons covalentes qui relient une paire de bases (par exemple G-G, G-C, T-A, etc) ont toutes une raideur équivalente identique. Dans l'exemple de la figure 2, cela signifie que $k_1 = k_2 = k$.

3. Quelle est la raideur d'un brin de séquence : GCTGAGG

Un double brin d'ADN est en fait une succession de "paires de bases". Chaque base est reliée à une base complémentaire (G avec C, T avec A) via des liaisons hydrogène comme représenté sur la figure 3

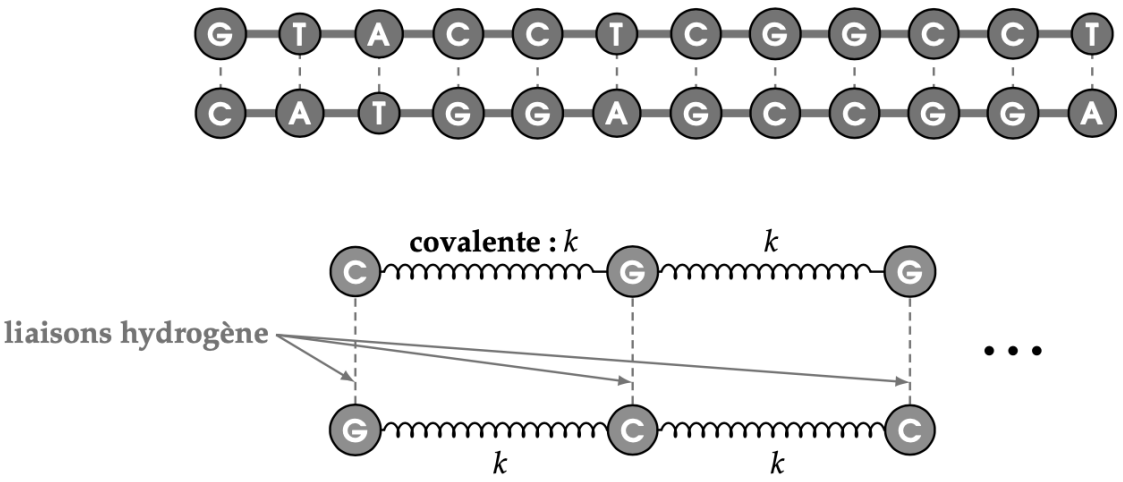


FIGURE 3 – Schématisation d'un morceau d'ADN double brin.

On néglige l'effet des liaisons hydrogène qui relient deux bases opposées. On tire sur une extrémité du double brin, l'autre restant attachée.

4. Quelle est la raideur d'un double brin constitué de 7 paires de bases, exprimée en fonction de k ?

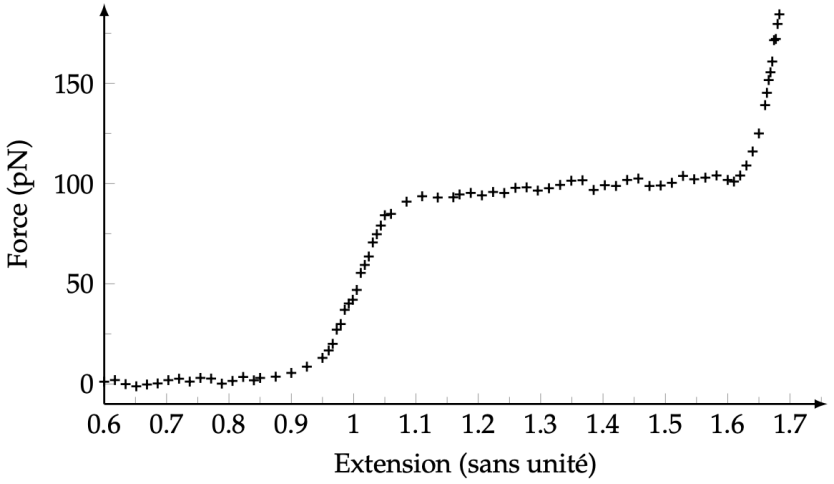


FIGURE 4 – Force de rappel (en pN) versus extension (allongement relatif) d'un morceau d'ADN double brin. [D'après Caron et al., « DNA : an extensible molecule »].

5. Sur quel domaine d'extension (figure 4) le modèle étudié semble-t-il valide ?
6. Sachant que la longueur à vide de séparation entre deux paires de bases est de l'ordre de 3 pm, donner un ordre de grandeur de k, la raideur d'une unique liaison covalente.

1.4 Elasticité d'un long brin d'ADN (> 200 paires de bases)

Le modèle précédent devient inapproprié pour les longues molécules d'ADN. La flexibilité de celui-ci fait qu'on peut le considérer comme une chaîne de bâtonnets rigides, chaque bâtonnet ayant une centaine de paires de bases de longueur environ.

Les forces dites « entropiques » dues aux collisions avec les molécules environnantes (typiquement, des molécules d'eau) font que, en pratique, on observe, pour un brin d'ADN dont les deux extrémités sont séparées d'une distance x, une énergie potentielle :

$$U(x) = U_0 + \frac{1}{2}k' \frac{x^2}{\langle r^2 \rangle}$$

où $k' = 3k_bT$ est une constante qui dépend uniquement de la température, et $\langle r^2 \rangle$ est décrit plus bas. Le brin d'ADN est modélisé comme une chaine de petits fragments rigides de longueur $a \approx 30\,\text{nm}$.

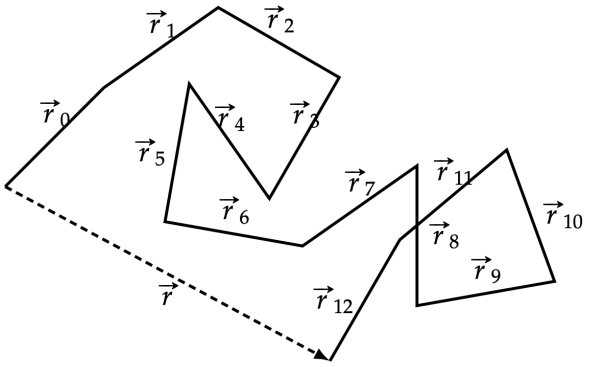


FIGURE 5 – Modélisation d'un long morceau d'ADN sous la forme d'une chaîne de bâtonnets.

On appelle $\vec{r}_i$ le vecteur déplacement associé au fragment i. On considère la direction des bâtonnets comme indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire que l'angle $\theta_{i,j}$ formé par les vecteurs $\vec{r}_i$ et $\vec{r}_j$ est aléatoire, réparti uniformément entre 0 et 2π, si $i \neq j$.

7. Quelle est la valeur moyenne $\langle \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \rangle$ du produit scalaire $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$ lorsque $i \neq j$?

8. Quelle est, dans ce cas, la valeur moyenne $\langle \vec{r} \rangle$ de $\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i$? Même question pour la valeur moyenne $\langle r^2 \rangle$ de $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$.

9. En envisageant une déformation unidimensionnelle, en déduire l'expression de la force élastique exercée par un brin d'ADN de longueur totale $L = Na$, et dont les extrémités sont séparées de x. Donner votre réponse en fonction de k_b, T, a, x et L.

1.5 Manipulation des molécules d'ADN

Pour mesurer ces forces, une méthode fréquemment utilisée est la pince optique. Cette méthode consiste à attacher le brin d'ADN à une petite bille de polystyrène, et la bille de polystyrène est elle-même piégée par un faisceau lumineux. L'objectif de cette partie est de comprendre comment un faisceau lumineux peut piéger la bille.

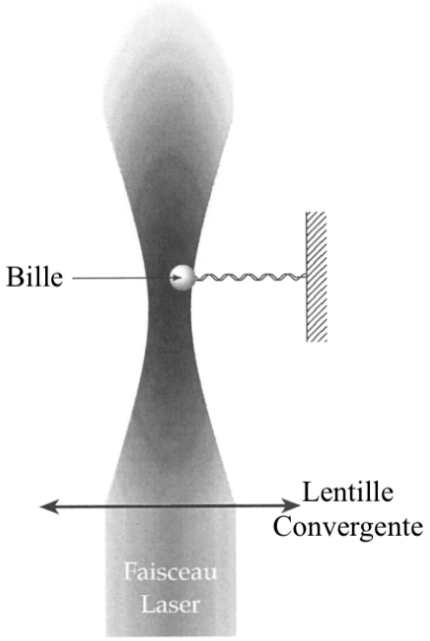


FIGURE 6 – Schéma expérimental d'une pince optique. Le niveau de gris indique l'intensité lumineuse du faisceau LASER.

Lorsque la bille est illuminée par une lumière cohérente (celle d'un LASER par exemple, comme représenté sur la figure 6), un pôle chargé positivement apparait sur la bille, ainsi qu'un pôle négatif du fait de la nature électromagnétique de la lumière. Du point de vue électrique, tout se passe comme si la bille était constituée de deux points $(M_1, -q)$, et $(M_2, +q)$. La neutralité de la bille garantie que les deux charges sont exactement opposées l'une de l'autre.

On note O le centre de la bille (figure 7, et $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ Dans tout le problème, on néglige le champ électrique que génèrent les deux charges situées en M_1 et M_2 par rapport au champ électrique extérieur.

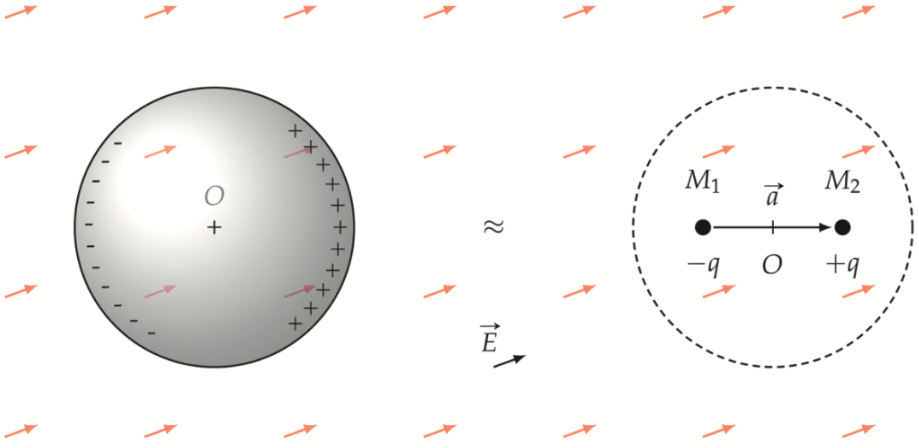


FIGURE 7 – Modélisation de la distribution de charge sur la bille.

10. On soumet cette bille à un champ électrique extérieur $\vec{E}$ uniforme. Quelle est la force électrique exercée sur la charge située en M_1 ? Quelle est la force électrique exercée sur la charge située en M_2 ? En déduire la force électrique totale $\vec{F}_E$ exercée sur la bille.

La charge située en M_1 est possiblement en mouvement à une vitesse $\vec{v}_1$. De même pour M_2 qui se déplace à la vitesse $\vec{v}_2$.

11. On soumet cette bille à un champ magnétique extérieur $\vec{B}$ uniforme. Quelle est la force magnétique exercée sur la charge située en M_1 ? Quelle est la force magnétique exercée sur la charge située en M_2 ? En déduire

que la force magnétique totale $\vec{F}_B$ exercée sur la bille s'exprime sous la forme :

$$\vec{F}_B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q\vec{a}) \wedge \vec{B}$$

On modélise le caractère local de l'éclairage lumineux de la pince optique par un champ électrique d'amplitude non-uniforme. Plus exactement, on suppose que le champ électrique prend la forme suivante :

$$\vec{E}(x,y,z,t) = E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \times \cos(\omega t - kz)\vec{e}_y$$

où σ est une constante connue.

12. Quelle est la direction de propagation ainsi que la polarisation de cette onde de champ électrique ?

Lorsque le champ électromagnétique n'est pas trop intense, on peut montrer que les forces électriques et magnétiques exercées sur la bille se mettent sous la forme :

$$\vec{F}_{EM} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

avec

$$\vec{F}_1 = \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E^2\right) \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{E} \wedge \vec{B}\right)$$

où α est une constante caractéristique du matériau de la bille et de l'environnement et le champ magnétique $\vec{B}$ est proportionnel au champ électrique E.
Enfin, on rappelle la définition de moyenne temporelle $\langle A \rangle$ d'une fonction de période T :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T}\int_{t=t_0}^{t_0+T} A(t)\mathrm{d}t$$

13. Donner l'expression de la moyenne temporelle de la force $\vec{F}_1$ exercée sur la bille.
14. Donner l'expression de la moyenne temporelle de la dérivée d'une fonction périodique : $\left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right\rangle$. En déduire la valeur moyenne de la force $\vec{F}_2$ exercée sur la bille.
15. Faire un schéma qui illustre l'orientation de la force électromagnétique moyenne exercée sur la bille, lorsqu'elle est dans un profil lumineux conforme à la figure 6 pour $|x| \ll \sigma$.