

SÉRIES NUMÉRIQUES

B. Landelle

Table des matières

I	Rappels sur les séries numériques	2
1	Généralités	2
2	Séries géométriques et télescopiques	2
3	Séries à termes positifs	3
4	Convergence absolue	4
II	Compléments sur les séries numériques	4
1	Critère de d'Alembert	4
2	Séries alternées	5
3	Techniques de comparaison série-intégrale [à savoir refaire]	7
4	Sommation des relations de comparaison	10

Dans ce qui suit, l'ensemble $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Rappels sur les séries numériques

1 Généralités

Définition 1. Pour $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la série $\sum u_n$ (ou $\sum_{n \geq 0} u_n$) est la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ pour n entier. Si $(S_n)_n$ converge, la série converge et la limite de $(S_n)_n$ est la somme de la série notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Sinon, la série diverge. Le reste d'une série convergente noté $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$ est une suite de limite nulle (avec $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$).

Remarque : Pour une suite définie à partir de n_0 , on adapte ce qui précède.

Vocabulaire : Deux séries sont dites de *même nature* si elles sont toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes. On peut remarquer que les séries $\sum u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} u_n$ sont de même nature.

Proposition 1 (Condition nécessaire de convergence). Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Démonstration. On a $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. □

Remarque : Le résultat ne se transpose pas au cadre des intégrales généralisées...

Vocabulaire : Si $u_n \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on dit que $\sum u_n$ *diverge grossièrement*.

Théorème 1. L'ensemble des séries à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergentes est un $\mathbb{K}$ -ev et on a la linéarité du symbole Σ .

Démonstration. En considérant les sommes partielles puis passage à la limite. □

2 Séries géométriques et télescopiques

Théorème 2 (Convergence d'une série géométrique). Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence

$$\sum \alpha^n \text{ converge} \iff |\alpha| < 1$$

Pour $|\alpha| < 1$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Démonstration. Si $|\alpha| \geq 1$, alors $|\alpha|^n \geq 1$ pour tout n entier d'où la divergence grossière. Si $|\alpha| < 1$, on a $S_n = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$ et $\alpha^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. □

Remarque : La série des restes $\sum R_n$ d'une série géométrique $\sum \alpha^n$ convergente est une série convergente. On a

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha^k = \alpha^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha} \quad \text{puis} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} R_n = \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1} = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)^2}$$

Proposition 2. Soit $\sum v_n$ une série télescopique avec $v_n = u_{n+1} - u_n$. La série $\sum v_n$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_n$ converge et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$$

Démonstration. On a $\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n [u_{k+1} - u_k] = u_{n+1} - u_0$ et le résultat suit. $\square$

Exemples célèbres : 1. Il existe une constante γ dite d'Euler telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$$

2. Convergence de la suite $\left(\left(\frac{n}{e} \right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} \right)_n$ en considérant son logarithme (équivalent de *de Moivre* avant celui de *Stirling*).

3 Séries à termes positifs

Proposition 3. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. On a

$$\sum u_n \text{ converge} \iff (S_n)_n \text{ majorée}$$

Démonstration. Théorème de la limite monotone appliqué à $(S_n)_n$. $\square$

Théorème 3. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ dans $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose $0 \leq u_n \leq v_n$ pour n entier. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
2. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Démonstration. 1. Conséquence de la proposition précédente.

2. Il existe un seuil N entier tel que $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2}v_n$ pour $n \geq N$ d'où

$$\forall n \geq N \quad \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$$

On applique alors le 1. $\square$

Corollaire 1. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ dans $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ avec $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration. Conséquence du théorème précédent et sa contraposée. $\square$

Proposition 4. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \geq 0$ pour n assez grand, alors on a $u_n \geq 0$ pour n assez grand.

Démonstration. On reprend la preuve du théorème 3 et le résultat suit. $\square$

Proposition 5. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n entier. Si $\sum w_n$ et $\sum u_n$ convergent, alors $\sum v_n$ converge.

Démonstration. On a $0 \leq v_n - u_n \leq w_n - u_n$ et la série $\sum (w_n - u_n)$ converge d'où la convergence de $\sum (v_n - u_n)$ par comparaison de séries à termes positifs. Par linéarité, la série $\sum (v_n - u_n + u_n) = \sum v_n$ converge. $\square$

4 Convergence absolue

Théorème 4. Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, i.e. $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a l'inégalité triangulaire généralisée

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration. Pour $(u_n)_n$ à valeurs réelles, on a $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$ et on invoque le résultat de la proposition 5 puis pour $(u_n)_n$ à valeurs complexes, on décompose $u_n = \operatorname{Re}(u_n) + i \operatorname{Im}(u_n)$ pour n entier. On s'appuie sur les inégalités suivantes :

et $\forall z \in \mathbb{C} \quad 0 \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad 0 \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

On conclut avec le théorème 3 et le cas réel. L'inégalité généralisée s'obtient par passage à la limite sur l'inégalité classique. $\square$

Théorème 5. Soient $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(v_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Alors $\sum u_n$ converge absolument.

Démonstration. Conséquence du théorème 3. $\square$

Corollaire 2. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum v_n$ converge absolument et si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ ou $o(v_n)$ ou $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ converge absolument.

Démonstration. Conséquence du théorème précédent. $\square$

Théorème 6. L'ensemble des séries absolument convergentes est un $\mathbb{K}$ -ev.

Démonstration. Conséquence de l'inégalité triangulaire. $\square$

II Compléments sur les séries numériques

1 Critère de d'Alembert

Théorème 7 (Critère de d'Alembert).

Soit $\sum u_n$ une série à termes non nuls telle que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
2. Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
3. Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Démonstration. • Si $\ell > 1$, comme $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq 1$$

d'où $\forall n \geq N \quad |u_{n+1}| \geq |u_n| \geq |u_N| > 0$

Par suite, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

- Si $\ell < 1$, on pose $\delta = 1 - \ell > 0$. Alors on a $q = \ell + \frac{\delta}{2} < 1$. Comme $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq \ell + \frac{\delta}{2} = q$$

Ainsi $\forall n \geq N \quad |u_n| = \prod_{k=N}^{n-1} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \times |u_N| \leq q^{n-N} |u_N| = O(q^n)$

La série $\sum q^n$ converge comme série géométrique convergente et par comparaison, la série $\sum u_n$ converge absolument.

- Si $\ell = 1$, la convergence et la divergence sont possibles : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. On peut obtenir leur nature par des arguments élémentaires :

$$\forall n \geq 2 \quad \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

et on conclut par télescopage. □

Exemples : Nature de la série $\sum \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$. La mise en œuvre du critère de d'Alembert est plus simple que le recours à l'équivalent de Stirling.

2 Séries alternées

Définition 2. Une série réelle $\sum u_n$ est dite alternée si la suite $((-1)^n u_n)_n$ est de signe constant.

Remarque : Si $\sum u_n$ est alternée, alors soit $u_n = (-1)^n |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 8 (Théorème des séries alternées). Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_n$ décroît et tend vers zéro. Alors $\sum u_n$ converge. De plus, sa somme est du signe de u_0 et comprise entre deux sommes partielles consécutives

Démonstration. Supposons $u_n = (-1)^n \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = |u_n|$ (sinon, il suffit de considérer $-u_n$).

On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \varepsilon_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \varepsilon_{2(n+1)} - \varepsilon_{2n+1} \leq 0$$

et

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -\varepsilon_{2n+3} + \varepsilon_{2n+2} \geq 0$$

Autrement dit, la suite extraite (S_{2n}) est décroissante et la suite extraite (S_{2n+1}) est croissante.

De plus, on a

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} \rightarrow 0$$

Par conséquent, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Ainsi, il existe $S \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = S \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = S$$

Comme les indices pairs et impairs forment une partition de $\mathbb{N}$, alors la suite $(S_n)_n$ converge vers la même limite S :

$$|S_n - S| \leq \max(|S_{2\lfloor n/2 \rfloor} - S|, |S_{2\lfloor n/2 \rfloor + 1} - S|) = o(1)$$

D'après le théorème sur les suites adjacentes, on sait également

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq S_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \leq S_0 = \varepsilon_0$$

D'où S est du signe de u_0 . □

Remarque : Si la série alternée est définie à partir du rang n_0 , le signe de la somme de $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est du signe de u_{n_0} puisqu'on a

$$\sum_{n \geq n_0} u_n = \text{signe}(u_{n_0}) \sum_{n \geq n_0} (-1)^n |\varepsilon_{n+n_0}|$$

Exemple : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée vérifiant le critère des séries alternées. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

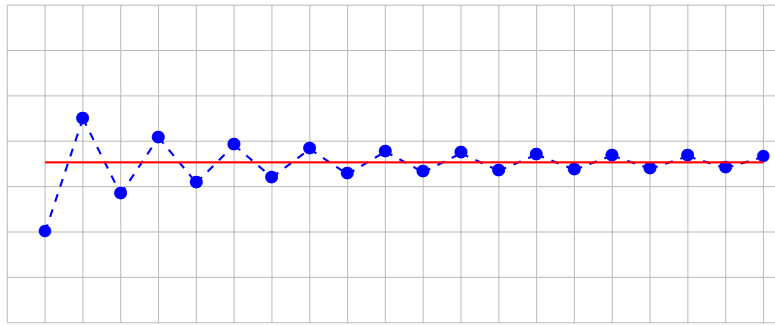


FIGURE 1 – Tracé de la suite $(S_n)_n$

Calculons sa somme. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt = - \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k \right) dt = - \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1+t} dt$$

Notons $\Delta_n = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$|\Delta_n| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt \leq \int_0^1 t^n dt = o(1)$$

Par suite
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = - \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = -\ln(2)$$

On verra ultérieurement d'autres procédés pour obtenir ce résultat.

Théorème 9 (Reste d'une série alternée). Soit $\sum u_n$ une série alternée vérifiant les hypothèses du critère des séries alternées. Alors R_n est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On applique le théorème spécial des séries alternées à la série définissant R_n à savoir $\sum_{k \geq n+1} u_k$. Par suite, R_n est du signe du premier terme u_{n+1} et compris entre les deux sommes partielles u_{n+1} et $u_{n+1} + u_{n+2}$. Si $u_{n+1} \geq 0$, on a $0 \leq u_{n+1} + u_{n+2} \leq R_n \leq u_{n+1}$ et si $u_{n+1} \leq 0$, on a $u_{n+1} \leq R_n \leq u_{n+1} + u_{n+2} \leq 0$. En observant

$$|u_{n+1} + u_{n+2}| = |u_{n+1}| - |u_{n+2}|$$

il vient

$$0 \leq |u_{n+1}| - |u_{n+2}| \leq |R_n| \leq |u_{n+1}|$$

□

Application : Calcul approché de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à une précision donnée.

Exemple : Pour $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, on sait que

$$|S - S_n| = |R_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc, pour $\varepsilon > 0$ fixé, si on a $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$, alors on aura $|S - S_n| \leq \varepsilon$. On choisit n avec

$$\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq n \iff n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$$

3 Techniques de comparaison série-intégrale [à savoir refaire]

Tous les résultats qui suivent (sauf le théorème sur les séries de Riemann) doivent être redémontrés avant utilisation. Si la fonction f considérée est définie sur $[n_0; +\infty[$ au lieu de $[0; +\infty[$, si la fonction f est croissante au lieu de décroissante, on adapte les résultats.

Proposition 6. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec f décroissante. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt$$

et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t) dt$

Démonstration. Par décroissance de f , on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [k; k+1] \quad f(t) \leq f(k)$$

et $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [k-1; k] \quad f(k) \leq f(t)$

Après intégration, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

Le premier encadrement suit par sommation pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et relation de Chasles. Puis, en sommant la première inégalité pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et la seconde pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec n entier, on obtient le deuxième encadrement par relation de Chasles. □

Théorème 10. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ avec f décroissante. Alors $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Démonstration. On note $S_n = \sum_{k=0}^n f(k)$ pour n entier. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)_n$ est majorée d'où la convergence de la série $\sum f(n)$ puisque la suite des sommes partielles est croissante majorée. Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors

$\int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ puisqu'il s'agit d'une fonction croissante non majorée d'après le théorème de limite monotone. En particulier, on a $\int_0^{n+1} f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ d'où $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. $\square$

Exemple : Nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.

Quelle stratégie ? pas d'équivalent plus simple.

Comparaison : On a $\frac{1}{n \ln(n)} \leq \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n \ln(n)} \geq \frac{1}{n(n-1)}$

Le théorème de comparaison ne donne rien. La minoration vient de l'inégalité de concavité $\ln x \leq x - 1$ pour $x > 0$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n \geq 2} \left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right]$ est convergente comme série télescopique.

Le théorème de comparaison série/intégrale règle la question. La fonction $[2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ est décroissante (inverse de fonction croissante) positive et $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)}$ est divergente.

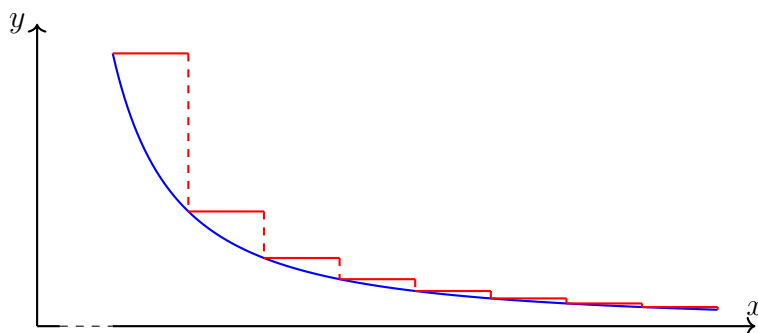


FIGURE 2 – Tracé de $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ et $n \mapsto \frac{1}{n \ln(n)}$

Corollaire 3 (Théorème sur les séries de Riemann). Soit α réel. On a l'équivalence

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Démonstration. Si $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement. Si $\alpha > 0$, on applique le théorème de comparaison série/intégrale avec $[1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ qui est décroissante positive et on conclut d'après le critère de Riemann pour les intégrales généralisées. $\square$

Remarque : Par négation de l'équivalence précédente, on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge} \iff \alpha \leq 1$$

Application : Construction d'une fonction continue positive non bornée dont l'intégrale est convergente.

Soit f affine par morceaux avec $f(t) = 0$ pour $t \in [0; 2 - \frac{1}{8}]$ et pour tout $n \geq 2$ $f(n) = n$, affine sur $[n - \frac{1}{n^3}; n]$ et $[n; n + \frac{1}{n^3}]$ et $f(t) = 0$ pour $t \in [n + \frac{1}{n^3}; (n+1) - \frac{1}{(n+1)^3}]$. Avec f ainsi définie, on a

$$0 \leq \int_0^x f(t) dt \leq \sum_{n=2}^{\lfloor x \rfloor + 1} \frac{1}{n^2}$$

d'où la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ bien que f soit non bornée.

La fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ constitue également un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^1$, croissante, convergente dont la dérivée n'admet pas de limite.

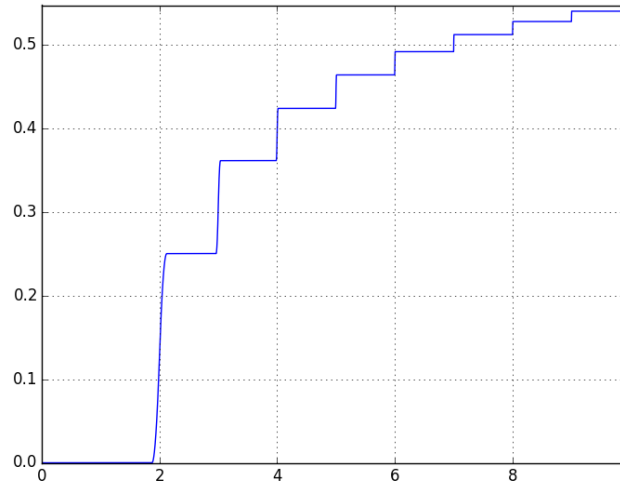
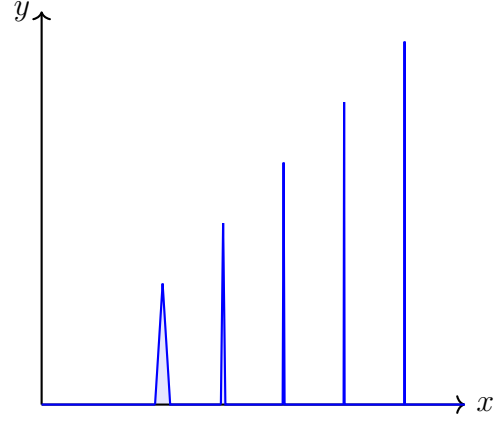


FIGURE 3 – Tracé de $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$

Proposition 7. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, f décroissante. On note S_n la somme partielle d'indice n de la série $\sum f(n)$ et R_n son reste d'ordre n en cas de convergence.

1. Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

2. Si $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^n f(t) dt$.

Démonstration. 1. On a $\forall k \geq 1 \quad \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt$

On somme pour $k \in \llbracket n+1; N \rrbracket$ et on obtient

$$\int_{n+1}^{N+1} f(t) dt \leq R_{n,N} = \sum_{k=n+1}^N f(k) \leq \int_n^N f(t) dt$$

On fait ensuite tendre $N \rightarrow +\infty$ (tous les termes convergent).

2. On a $\int_0^n f(t) dt \rightarrow +\infty$ puisque $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ diverge et la fonction f admet une limite finie en $+\infty$ (limite monotone). Ainsi

$$\int_0^{n+1} f(t) dt \geq \int_0^n f(t) dt + \underbrace{f(n+1)}_{=O(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^n f(t) dt$$

et l'équivalent attendu vient par encadrement. $\square$

Remarque : L'encadrement du reste ne permet pas à coup sûr d'obtenir un équivalent. Par exemple, avec $f(t) = e^{-t}$, on obtient $e^{-(n+1)} \leq R_n \leq e^{-n}$ qui ne permet pas de conclure. Le calcul direct donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e^{-(n+1)}}{1 - e^{-1}}$$

Exemples : 1. On a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{dt}{t} + O(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

2. On a $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \implies \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

3. On peut appliquer les mêmes techniques si f croît. Par exemple, avec $f(t) = \sqrt{t}$ pour $t \geq 0$, il vient

$$\forall k \geq 1 \quad \int_{k-1}^k \sqrt{t} dt \leq \sqrt{k} \leq \int_k^{k+1} \sqrt{t} dt$$

Puis $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^n \sqrt{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t} dt \implies \sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n \sqrt{n}$

Remarque : On peut obtenir ce résultat plus naïvement avec une utilisation de somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} = n \sqrt{n} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{t} dt} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n \sqrt{n}$$

4 Sommation des relations de comparaison

Dans cette section, la suite $(v_n)_n$ est supposée positive mais les résultats valent aussi pour une suite négative (en considérant $(-v_n)_n$).

Théorème 11. Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente.

1. Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$;
2. Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$;
3. Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge absolument et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Démonstration. Dans tous les cas, on a $u_n = O(v_n)$ d'où la convergence absolue de $\sum u_n$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N entier tel que

$$\forall k \geq N \quad |u_k| \leq \varepsilon v_k$$

Par inégalité triangulaire et comparaison, il vient pour $n \geq N$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

ce qui est le résultat attendu.

2. La preuve est similaire.

3. On applique le résultat du 1. avec $u_n - v_n = o(v_n)$. □

Remarque : Le résultat vaut encore si $(v_n)_n$ est positive seulement à partir d'un certain rang (en adaptant la preuve).

Exemple : On a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Théorème 12. Soit $\sum u_n$ une série numérique et $\sum v_n$ une série à termes positifs divergente.

1. Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$;
2. Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$;
3. Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k$.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N entier tel que

$$\forall k \geq N \quad |u_k| \leq \varepsilon v_k$$

Pour $n \geq N$, il vient

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + \sum_{k=N}^n |u_k| \leq \left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| + \varepsilon \sum_{k=N}^n v_k$$

Comme $\sum_{k=N}^n v_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{+} +\infty$ en tant que somme partielle d'une série à termes positifs divergente,

il existe $P \geq N$ tel que $\left| \sum_{k=0}^{N-1} u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=N}^n v_k$ pour $n \geq P$, d'où

$$\forall n \geq P \quad \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq 2\varepsilon \sum_{k=N}^n v_k \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$$

Le résultat suit.

2. La preuve est similaire.

3. On utilise ensuite le résultat du 1. avec $u_n - v_n = o(v_n)$.

□

Remarque : Le résultat vaut encore si $(v_n)_n$ est positive seulement à partir d'un certain rang (en adaptant la preuve).

Exemples : 1. On a $\sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_{n-1}^n \sqrt{t} dt$ puisque $\sqrt{n-1} \leq \int_n^{n+1} \sqrt{t} dt \leq \sqrt{n}$ et par suite

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^n \sqrt{t} dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3} n \sqrt{n}$$

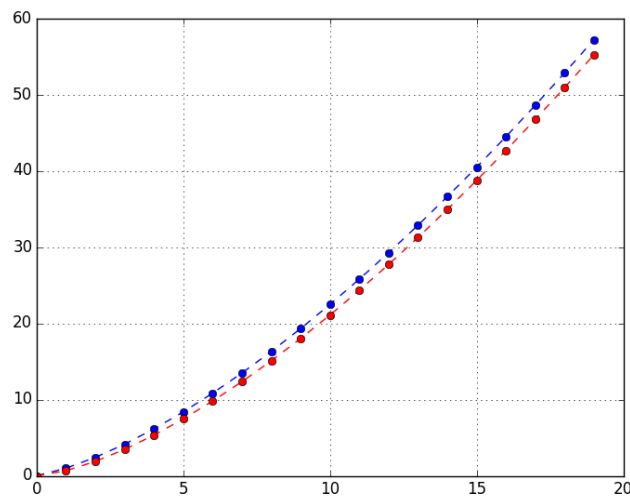


FIGURE 4 – Tracé des suites $\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{k}\right)_n$ et $\left(\frac{2}{3}n\sqrt{n}\right)_n$

2. On a $\int_n^{n+1} \ln(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ puisque $\ln(n) \leq \int_n^{n+1} \ln(t) dt \leq \ln(n+1)$ et par suite

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^{n+1} \ln(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$$

On peut bien sûr obtenir ce résultat avec l'équivalent de Stirling mais c'est plus savant.

Corollaire 4 (Lemme de Césaro). Soit $(u_n)_n$ suite réelle ou complexe admettant une limite ℓ (éventuellement infinie dans le cas réel). On a

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$$

Démonstration. Supposons ℓ finie. On a $u_n - \ell = o(1)$ d'où par sommation de relations de comparaison, la série $\sum 1$ étant positive et grossièrement divergente

$$\sum_{k=0}^n [u_k - \ell] = o\left(\sum_{k=0}^n 1\right) = o(n+1)$$

et par conséquent

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \ell + o(1)$$

Supposons $(u_n)_n$ réelle et $\ell = +\infty$ (preuve identique pour $-\infty$). On a $1 = o(u_n)$ d'où par sommation de relations de comparaison, la suite $(u_n)_n$ étant positive à partir d'un certain rang et la série $\sum u_n$ grossièrement divergente

$$\sum_{k=0}^n 1 = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$$

autrement dit

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

□

Règle : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n^\beta}$ avec C réel non nul et $\beta > 0$, alors on peut appliquer la règle suivante : on cherche α réel tel que $(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha)_n$ admette une limite finie ℓ non nulle. Si un tel α existe, il est strictement négatif et le théorème de Césaro donne

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha] = \frac{1}{n} [u_n^\alpha - u_0^\alpha] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$$

d'où

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell^{\frac{1}{\alpha}} n^{\frac{1}{\alpha}}$$

Exemple : Soit $(u_n)_n$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$. Déterminons un équivalent de u_n pour $n \rightarrow +\infty$. Sans difficulté, on trouve $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $u_n > 0$ pour tout n entier. Puis, pour α réel, on a

$$u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha [e^{-\alpha u_n} - 1] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\alpha u_n^{\alpha+1}$$

On choisit alors $\alpha = -1$. Ainsi

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right] = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

D'où

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

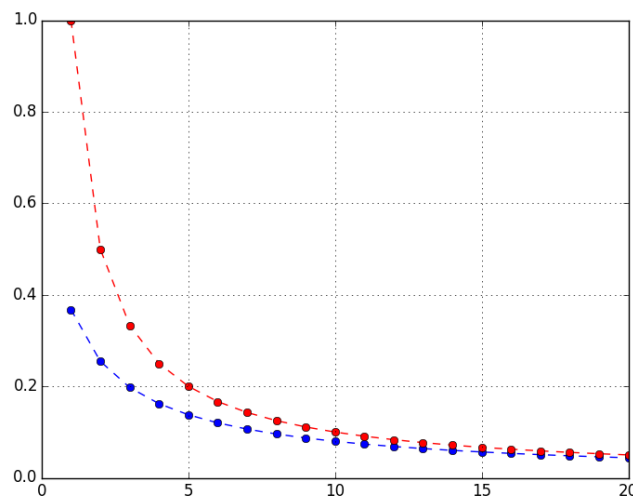


FIGURE 5 – Tracé des suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$