

Feuille d'exercices n°09

Exercice 1 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$ pour n entier.

Montrer $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum (u_n - \ell)$.

Corrigé : Posons $f(x) = \frac{1}{2+x}$ pour $x \geq 0$. On a $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ d'où $u_n \geq 0$ pour tout n entier par récurrence immédiate. Par dérivation, on trouve

$$\forall x \geq 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{(2+x)^2} \quad \longrightarrow \quad \sup_{x \geq 0} |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est k -contractante avec $k \in]0; 1[$. On a

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = x \iff x^2 + 2x = 1 \iff (x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2}) = 0 \iff x = \sqrt{2} - 1$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| u_n - (\sqrt{2} - 1) \right| \leq k^n \left| u_0 - (\sqrt{2} - 1) \right|$$

On conclut

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sqrt{2} - 1 \quad \text{et} \quad \sum (u_n - \sqrt{2} + 1) \text{ converge absolument.}$$

Exercice 2 (***)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Corrigé : Posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{\sqrt{k}}$ pour n entier. Pour p entier non nul, on pose $U_p = S_{p^2-1}$.

On a

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad U_{p+1} - U_p = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{\sqrt{k}} = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^p}{\sqrt{k}} = (-1)^p \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Par monotonie, on trouve

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{(p+1)^2}} = \frac{2p+1}{p+1} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 2$$

Ainsi, la série télescopique $\sum_{p \geq 1} [U_{p+1} - U_p]$ diverge grossièrement d'où la divergence de la suite $(U_p)_{p \geq 1}$ c'est-à-dire de la suite $(S_{p^2-1})_{p \geq 1}$ extraite de la suite des sommes partielles. On conclut

$$\text{La série } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}} \text{ diverge.}$$

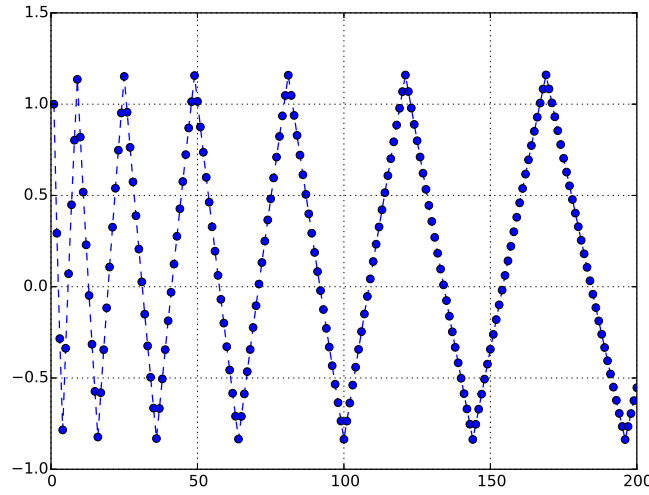


FIGURE 1 – Tracé de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$

Remarque : Soit p entier non nul. On a

$$v_p = |U_{p+1} - U_p| = \sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Par comparaison série/intégrale, on trouve

$$\int_{p^2}^{(p+1)^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq v_p \leq \int_{p^2-1}^{(p+1)^2-1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

d'où
$$2 \leq v_p \leq 2 \left(\sqrt{p^2 + 2p} - \sqrt{p^2 - 1} \right) = 2p \left(\sqrt{1 + \frac{2}{p}} - \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}} \right)$$

Avec le développement usuel $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + O(u^3)$, on obtient

$$\sqrt{1 + \frac{2}{p}} - \sqrt{1 - \frac{1}{p^2}} \underset{p \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{2p^2} - \left(1 - \frac{1}{2p^2} \right) + O\left(\frac{1}{p^3}\right) = \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^3}\right)$$

Et par conséquent
$$v_p \underset{p \rightarrow +\infty}{=} 2 + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Il s'ensuit
$$\sum_{p=1}^n [U_{p+1} - U_p] = \sum_{p=1}^n (-1)^p v_p = 2 \sum_{p=1}^n (-1)^p + \sum_{p=1}^n O\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

Ceci prouve que la suite $(U_p)_{p \geq 1}$ est bornée. Enfin, les ensembles $([p^2; (p+1)^2 - 1])_{p \geq 1}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$. Pour n entier non nul, il existe un unique p entier non nul tel que $n \in [p^2; (p+1)^2 - 1]$. Ainsi

$$S_n = U_p + (-1)^p \sum_{k=p^2}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Cette écriture prouve la monotonie de S_n pour $n \in [p^2; (p+1)^2 - 1]$ et donc S_n prend des valeurs entre U_p et U_{p+1} . On en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

Exercice 3 (****)

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle non nulle. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ pour n entier. On suppose

$$a_n S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Montrer

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$$

Corrigé : La suite $(S_n)_n$ est croissante positive donc admet une limite $\ell \in]0; +\infty[\cup \{+\infty\}$. Supposons que cette limite soit finie. On aurait alors $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1}{\ell}$ d'où la divergence grossière de la série $\sum a_n^2$ ce qui contredit l'hypothèse sur $(S_n)_n$. On en déduit que $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ et $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Pour n entier non nul, on a

$$S_n^3 - S_{n-1}^3 = (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2) = a_n^2 (S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2)$$

On remarque
$$a_n S_{n-1} = a_n (S_n - a_n^2) = a_n S_n + a_n^3 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Il s'ensuit
$$S_n^3 - S_{n-1}^3 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3$$

et d'après le lemme de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [S_k^3 - S_{k-1}^3] = \frac{S_n^3}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 3$$

On conclut

$$\boxed{a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}}$$

Remarque : Comment peut-on avoir l'idée de considérer $S_n^3 - S_{n-1}^3$ pour n entier non nul ? Comme $a_n S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, chercher un équivalent de a_n pour $n \rightarrow +\infty$ équivaut à chercher un équivalent de S_n pour $n \rightarrow +\infty$. On va donc chercher à isoler a_n ou S_n mais d'après la définition de S_n , il semble plus réaliste d'envisager d'isoler S_n . On remarque

$$a_n^2 S_n^2 = (S_n - S_{n-1}) S_n^2 = S_n^3 - S_{n-1} S_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Cette dernière expression est « proche » d'une forme télescopique ce qui amène naturellement à considérer $S_n^3 - S_{n-1}^3$ qui permet d'isoler S_n^3 après télescopage et permet aussi d'espérer un comportement adapté au lemme de Césaro et c'est exactement ce qui a lieu.

Exercice 4 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[,]0; +\infty[])$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

Montrer que la série $\sum f(n)$ converge et donner un équivalent du reste d'ordre n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : Il existe $a \geq 0$ tel que $\frac{f'(x)}{f(x)} \leq -1$ pour $x \geq a$. Ainsi, pour $x \geq a$, on a

$$\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right) \leq -(x - a)$$

d'où $\forall n \geq a \quad 0 \leq f(n) \leq f(a)e^{-n+a} = O(e^{-n})$

et par comparaison à une série géométrique convergente, on conclut

$$\boxed{\text{La série } \sum f(n) \text{ converge.}}$$

Soit $c > 0$. Il existe $A \geq 0$ tel que $\frac{f'(x)}{f(x)} \leq -c$ pour $x \geq A$. Ainsi, avec $N = \lfloor A \rfloor$, il vient

$$\forall n \geq N \quad \forall k \geq 0 \quad \int_{n+1}^{n+k+1} \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln \left(\frac{f(n+k+1)}{f(n+1)} \right) \leq -ck$$

ce qui équivaut à $\forall n \geq N \quad f(n+k+1) \leq f(n+1)e^{-ck}$

Par suite $\forall n \geq N \quad R_{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} f(n+k+1) \leq f(n+1) \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-ck} = f(n+1) \frac{e^{-c}}{1-e^{-c}}$

Comme $e^{-c} \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0$, il s'ensuit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \implies 0 \leq R_{n+1} \leq \varepsilon f(n+1)$$

ce qui signifie $R_{n+1} = o(f(n+1))$

Or, on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n = f(n+1) + R_{n+1}$

On conclut

$$\boxed{R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} f(n)}$$

Exercice 5 (****)

Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Corrigé : L'idée est de considérer des suites extraites de sorte que les valeurs de $\sin(\sqrt{n})$ soient concentrées au dessus de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{\pi}{4} \right)^2 \right\rfloor \quad \text{et} \quad \beta_n = \left\lceil \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4} \right)^2 \right\rceil$$

Ainsi, pour n entier, on a en particulier

$$\sqrt{\alpha_n + 1} > 2n\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sqrt{\beta_n} \leq 2n\pi + \frac{3\pi}{4}$$

et $\beta_n - \alpha_n \geq \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4} \right)^2 - 1 - \left(2n\pi + \frac{\pi}{4} \right)^2 \geq 2n\pi^2 + o(n)$

Par suite, on obtient pour n entier

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{1}{\sqrt{\beta_n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2n\pi^2 + o(n)}{2n\pi + o(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Notant $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(\sqrt{k})}{\sqrt{k}}$, si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ convergerait, on aurait $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S$ avec S réel et par conséquent

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{\sqrt{k}} = S_{\beta_n} - S_{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ce qui n'a pas lieu. On conclut

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ diverge.

Remarque : La fonction $\sqrt{\cdot}$ croît lentement. Ainsi, on peut trouver suffisamment de points répartis entre $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ et $2n\pi + \frac{3\pi}{4}$, c'est-à-dire suffisamment de points dont le sinus est « grand » pour que leur somme contredise la convergence.

Exercice 6 (****)

Déterminer la nature de la série de terme général $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Corrigé : La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est alternée et vérifie le critère des séries alternées puisque la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ décroît et tend vers zéro. Son reste R_n d'ordre n est donc bien défini. On sait aussi que R_n est du signe de $\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$ donc la série $\sum R_n$ est alternée et on a $|R_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ d'où $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Il reste à établir la décroissance de la suite $(|R_n|)_n$ pour invoquer le théorème des séries alternées. Un changement d'indice donne

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+n+1}}{\sqrt{k+n+1}} = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+n+1}}$$

d'où
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |R_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+n+1}}$$

Ainsi, pour n entier, par linéarité du symbole somme en cas de convergence

$$|R_{n+1}| - |R_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{\sqrt{k+n+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+n+1}} \right]$$

Soit n entier. D'après le théorème des accroissements finis appliqué à $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{n+1+u}}$ sur $]k; k+1[$, il existe $\alpha_{n,k} \in]k; k+1[$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt{k+n+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+n+1}} = -\frac{1}{2(n+1+\alpha_{n,k})^{\frac{3}{2}}}$$

On pose $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2 \quad \varepsilon_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{k+n+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+n+2}} = \frac{1}{2(n+1+\alpha_{n,k})^{\frac{3}{2}}}$

Clairement
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_{n,k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

Pour n et k entiers, comme $\alpha_{n,k} < k+1 < \alpha_{n,k+1}$, on en déduit que la suite $(\varepsilon_{n,k})_k$ décroît et par conséquent, la série définissant

$$|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \varepsilon_{n,k}$$

vérifie elle aussi le théorème des séries alternées. Le signe de sa somme est donc celui de son premier terme à savoir positif ce qui prouve

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |R_n| \geq |R_{n+1}|$$

On conclut

La série $\sum \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.
--