

Feuille d'exercices n°07

Exercice 1 (*)

Nature de la série de terme général :

1. $e^{-\sqrt{\ln(n)}}$
2. $\ln(\operatorname{th}(n))$
3. $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Exercice 2 (**)

Nature de la série de terme général :

1. $\frac{\sum_{k=1}^n k!}{(n+1)!}$
2. $\operatorname{th}(n)^n$
3. $\frac{\ln(n)^n}{n!}$

Exercice 3 (**)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin(\pi\sqrt{1+n^2})$
2. $\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$
3. $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$

Exercice 4 (*)

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ en fonction du paramètre $\beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 (*)

Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} - \ln(\ln(n))$.

Exercice 6 (**)

Soit $\alpha > 0$. Nature des séries de terme général :

1. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$
2. $\frac{1}{\sum_{k=1}^n k^\alpha}$
3. $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$

Exercice 7 (**)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ fonction décroissante de limite nulle en $+\infty$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin(t) \, dt$$

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ puis la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t) \, dt$.

Exercice 8 (*)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

$$1. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} \qquad 2. \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

Exercice 9 (**)

Vérifier la convergence puis calculer la somme des séries suivantes :

$$1. \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \qquad 2. \sum \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

Exercice 10 (**)

$$1. \text{ Montrer } \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \quad \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y) = \text{Arctan} \left(\frac{x-y}{1+xy} \right)$$
$$2. \text{ Convergence puis somme de la série } \sum_{n \geq 1} \text{Arctan} \left(\frac{1}{1+n+n^2} \right)$$

Exercice 11 (**)

Nature des séries de terme général :

$$1. \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\text{th}(k)}{k\sqrt{k}} \qquad 2. (-1)^n \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad 3. \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k \ln(k)^2}$$

Exercice 12 (**)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = \ln(e - 1 + u_n)$ pour n entier.

Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum (u_n - \ell)$.