

Feuille d'exercices n°09

Exercice 1 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$ pour n entier.

Montrer $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ avec ℓ un réel à préciser puis déterminer la nature de la série $\sum (u_n - \ell)$.

Indications : Considérer $f : x \in [0; +\infty[\mapsto \frac{1}{2+x}$ et montrer qu'elle est k -lipschitzienne avec $k < 1$. En déduire une majoration explicite de $|u_n - \ell|$ pour n entier avec ℓ à déterminer.

Exercice 2 (***)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Indications : Pour p entier non nul, poser $U_p = S_{p^2-1}$ et considérer $\sum_{p \geq 1} [U_{p+1} - U_p]$.

Exercice 3 (****)

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle non nulle. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ pour n entier. On suppose

$$a_n S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Montrer $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$

Indications : Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ puis considérer $S_n^3 - S_{n-1}^3$ pour n entier non nul et utiliser une sommation de relation de comparaison.

Exercice 4 (***)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[;]0; +\infty[)$ telle que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} -\infty$$

Montrer que la série $\sum f(n)$ converge et donner un équivalent du reste d'ordre n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Indications : Montrer que $\frac{f'(x)}{f(x)} \leq -1$ pour x suffisamment grand puis intégrer l'inégalité. Pour le reste d'ordre n , s'inspirer de la démarche précédente en justifiant que pour $c > 0$, on a $\frac{f'(x)}{f(x)} \leq -c$ pour x suffisamment grand et en intégrant sur $\llbracket n+1; n+k+1 \rrbracket$ avec n assez grand.

Exercice 5 (****)

Nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

Indications : Poser

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor \quad \text{et} \quad \beta_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor$$

puis considérer

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{\sqrt{k}}$$

Exercice 6 (****)

Déterminer la nature de la série de terme général $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Indications : Pour n entier, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, bien défini comme reste d'une série alternée qui vérifie le critère des séries alternées. Établir pour n entier

$$|R_{n+1}| - |R_n| = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{\sqrt{k+n+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+n+1}} \right]$$

puis utiliser le théorème des accroissements finis sur $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{n+1+u}}$.