

Feuille d'exercices n°08

Exercice 1 (***)

Nature de la série de terme général :

1. $\sin(2\pi n!e)$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$

3. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$

Exercice 2 (***)

Montrer

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{t}} \right\rfloor dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 3 (***)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

et soit $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ avec $\beta > 0$.

1. Si $\alpha > 1$, choisir $\beta \in]1; \alpha[$, comparer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire la convergence de $\sum_{n \geq 1} u_n$.
2. Compléter l'étude pour $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$.

Exercice 4 (**)

Soit $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ pour n entier avec $A_0 = 0$ pour convention.

1. Montrer
$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

2. Application : pour θ réel, déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

Exercice 5 (****)

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ puis déterminer un équivalent simple de u_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 6 (***)

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par
$$\begin{cases} u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n) \\ u_0 > 0 \end{cases}.$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ puis déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 7 (***)

Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = x_n + e^{-x_n}$ pour n entier.

1. Préciser la monotonie puis le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_n$.
2. Déterminer un équivalent simple de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 8 (****)

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries complexes convergentes de sommes respectives A et B. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad \text{et} \quad C_n = \sum_{k=0}^n c_k$$

Montrer

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB$$