

Devoir en temps libre n°3

Problème I

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels non nuls. On note

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \prod_{k=0}^n u_k$$

On dit que le *produit infini* $\prod u_n$ converge si la suite $(P_n)_n$ admet une limite finie non nulle.

1. Montrer que si $\prod u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.
2. On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de réels positifs. Montrer

$$\prod (1 + u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

3. On suppose que $(u_n)_n$ est une suite à valeurs dans $[0; 1[$. Montrer

$$\prod (1 - u_n) \text{ converge} \iff \sum u_n \text{ converge}$$

Problème II

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

1. Justifier que pour n entier, le reste R_n d'ordre n est bien défini.
2. Montrer la convergence puis calculer la somme de la série $\sum R_n$.

Problème III

On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$$

1. Justifier l'existence d'une constante γ réelle telle que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

2. En considérant la série télescopique $\sum_{n \geq 2} [v_n - v_{n-1}]$, établir

$$v_n = \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.