

Préparation à l'interrogation n°03

1 Croissances comparées

Soient $\alpha, \beta > 0$. On a

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad x^\beta e^{-\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad x^\alpha \ln(x)^\beta \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

2 Formules

1. Formule de Taylor reste intégral;
2. Équivalent de Stirling.

3 Dérivation

Imparité (penser à l'expression conjuguée) et dérivée de la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

4 Trigonométrie

$$1. \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad 2. \sin(t)^2 = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

5 Calcul intégral

$$1. \int \frac{dt}{\cos(t)^2} = \tan(t) \quad 2. \int \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)^2} = \operatorname{th}(t) \quad 3. \int \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \text{ si } \alpha \neq 1$$

6 Exercice type

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(X-a)(X-b)$ avec a, b réels distincts.

Corrigé : D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$X^n = (X-a)(X-b)Q + R \quad (*)$$

avec $\deg R < 2$, autrement dit $R = \alpha X + \beta$ avec α, β réels. En substituant X par a puis par b dans $(*)$, on obtient

$$\begin{cases} a^n = \alpha a + \beta \\ b^n = \alpha b + \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{a^n - b^n}{a - b} \\ \beta = \frac{ab^n - ba^n}{a - b} \end{cases}$$

Ainsi

$$\text{Si } a \neq b, \text{ on a } R = \frac{1}{a-b} ((a^n - b^n)X + ab^n - ba^n)$$

7 Exercice type - Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n dt$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout $n \geq 2$.
2. Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles en distinguant selon la parité de n .
3. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_n$.
4. En considérant la suite $(nI_n I_{n-1})_{n \geq 1}$, déterminer un équivalent de I_n pour $n \rightarrow +\infty$.

Corrigé : 1. En intégrant par parties, il vient

$$I_n = [-\cos(t) \sin(t)^{n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n-2} \cos(t)^2 dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \geq 2 \quad nI_n = (n-1)I_{n-2}}$$

2. On a $I_n > 0$ pour tout n entier puisque $t \mapsto \sin(t)^n$ est continue positive non nulle. Soit n entier. On a le produit télescopique

$$I_{2n} = I_0 \prod_{k=1}^n \left(\frac{I_{2k}}{I_{2(k-1)}} \right) = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = I_0 \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)2k}{(2k)^2} = I_0 \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

et
$$I_{2n+1} = I_1 \prod_{k=1}^n \left(\frac{I_{2k+1}}{I_{2k-1}} \right) = I_1 \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2k+1} \right) = I_1 \prod_{k=1}^n \frac{(2k)^2}{2k(2k+1)} = I_1 \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$$

Avec $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$, on conclut

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$$

3. La suite $(I_n)_n$ est clairement décroissante.

4. En multipliant la relation établie à la première question par I_{n-1} , on trouve

$$\forall n \geq 2 \quad nI_n I_{n-1} = (n-1)I_{n-1} I_{n-2}$$

ce qui prouve que la suite est constante. Par suite

$$\forall n \geq 1 \quad nI_n I_{n-1} = I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$$

Par décroissance et positivité de $(I_n)_n$, il vient

$$nI_{n+1} I_n = (n+1)I_{n+1} I_n \times \frac{n}{n+1} \leq nI_n^2 \leq nI_n I_{n-1}$$

Par encadrement

$$\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Remarque : L'intégrale I_n est communément appelée *intégrale de Wallis*.

8 Questions de cours

Séries numériques, convexité, graphes usuels.