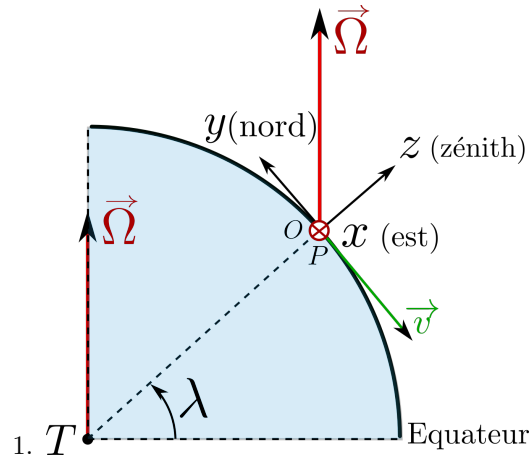


TD 2 : Référentiels non galiléens

Exercice 1: Force de Coriolis sur un train (★)



2. La force de Coriolis est donnée par :

$$\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(P/\mathcal{R}_{terrestre})$$

or $\vec{v}(P/\mathcal{R}_{terrestre}) = \vec{v} = -v\vec{e}_y$ et $\vec{\Omega} = \Omega(\cos(\lambda)\vec{e}_y + \sin(\lambda)\vec{e}_z)$, donc :

$$\vec{f}_{ic} = 2m\Omega(\cos(\lambda)\vec{e}_y + \sin(\lambda)\vec{e}_z) \wedge v\vec{e}_y$$

soit

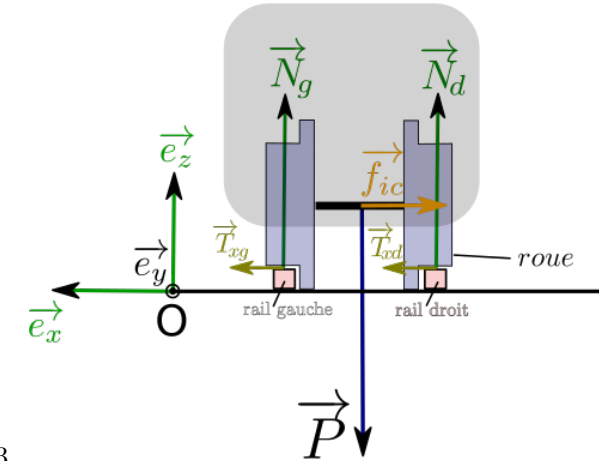
$$\boxed{\vec{f}_{ic} = -2mv\Omega \sin(\lambda)\vec{e}_x}$$

On compare sa norme à celle du poids du train :

$$\boxed{\frac{f_{ic}}{P} = \frac{2v\Omega \sin(\lambda)}{g}}$$

$$\text{AN : } f_{ic} = 2 \times 7,8 \times 10^5 \times \left(\frac{2\pi}{24 \times 3600} \right) \times \frac{300 \times 1 \times 10^3}{3600} \times \sin(45^\circ) = 6,7 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\frac{f_{ic}}{P} = \frac{2 \times 300 \times 7,8 \times 10^{-5} \times \sin(45^\circ)}{3,6 \times 9,8} = 8,8 \times 10^{-4}$$



3.

Bilan des actions :

— Poids : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$

— Force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{ic} = -2mv\Omega \sin(\lambda)\vec{e}_x$

— Action de contact du rail de gauche : $\vec{R}_g = \vec{N}_g + \vec{T}_g = N_g\vec{e}_z + T_{xg}\vec{e}_x + T_{yg}\vec{e}_y$

— Action de contact du rail de droite : $\vec{R}_d = \vec{N}_d + \vec{T}_d = N_d\vec{e}_z + T_{xd}\vec{e}_x + T_{yd}\vec{e}_y$

Il n'y a pas de mouvement selon $\vec{e}_z$ donc les composantes des forces selon $\vec{e}_z$ se compensent :

$$-mg + N_d + N_g = 0$$

Il existe des forces de frottement selon $\vec{e}_y$ opposées au mouvement.

Il n'y a pas de mouvement selon $\vec{e}_x$ donc les composantes des forces selon $\vec{e}_x$ se compensent :

$$T_{xg} + T_{xd} + \vec{f}_{ic} \cdot \vec{e}_x = 0$$

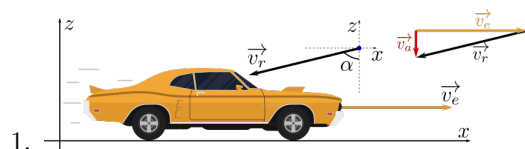
on a donc

$$T_{xg} + T_{xd} = f_{ic} = 2mv\Omega \sin(\lambda) > 0$$

donc les actions des rails sur le train sont suivant l'axe $\vec{e}_x$ et sont orientées vers l'est. Par application du principe des actions réciproques, le train agit sur les rails avec une force orientée vers l'ouest. Vue la forme des roues (recourbées à l'intérieur du rail), c'est le rail situé à l'ouest qui s'usera plus vite à l'intérieur.

Si le train va vers le nord, c'est le contraire : c'est le rail situé à l'est qui s'usera plus vite (toujours le rail de droite vu de derrière!).

Exercice 2: "Il pleut" (★)



1.

Pour ce genre d'exercice où l'énoncé est succinct, il faut adopter une rédaction rigoureuse afin de mettre en oeuvre les notions du cours.

Soit $\mathcal{R}_a$ le référentiel terrestre supposé galiléen.

Soit $\mathcal{R}_r$ le référentiel voiture galiléen car en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_a$.

Le système est la goutte d'eau.

D'après la loi de composition des vitesses, on a :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

avec $\vec{v}_a$ la vitesse de la goutte dans le référentiel $\mathcal{R}_a$. D'après l'énoncé et le repère choisi sur le schéma, on a : $\vec{v}_a = -v_a \vec{e}_z$;

$\vec{v}_r$ la vitesse de la goutte dans $\mathcal{R}_r$ donc inclinée de 80° par rapport à la verticale :

$$\vec{v}_r = -v_r \sin(\alpha) \vec{e}_x - v_r \cos(\alpha) \vec{e}_z$$

et $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_x$ la vitesse du référentiel $\mathcal{R}_r$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}_a$ soit ici la vitesse de la voiture.

La projection de la relation de composition des vitesses sur les axes verticaux et horizontaux donne :

$$\begin{cases} \text{sur } \vec{e}_x : & 0 = -v_r \sin(\alpha) + v_e \\ \text{sur } \vec{e}_z : & -v_a = -v_r \cos(\alpha) \end{cases}$$

On en déduit

$$v_r = \frac{v_e}{\sin(\alpha)}$$

$$\text{AN : } v_r = \frac{100}{3,6 \times \sin(80)} = 28 \text{ m s}^{-1}$$

De même, on a :

$$v_a = v_r \cos(\alpha)$$

$$\text{AN : } v_a = 28,2 \times \cos(80) = 4,9 \text{ m s}^{-1} = 18 \text{ km h}^{-1}$$

On trouve donc que la goutte chute à une vitesse de 18 km h^{-1} . La vitesse de chute des gouttes d'eau dépend de leur taille :

- les petites gouttes ($0,05 \text{ mm} < \text{diamètre} < 0,5 \text{ mm}$), presque sphériques ont une vitesse de chute entre $0,1$ et $2 \text{ m s}^{-1} \approx 7 \text{ km h}^{-1}$
- les gouttes moyennes ($0,5 \text{ mm} < \text{diamètre} < 3 \text{ mm}$), aplaties par la résistance de l'air ont une vitesse de chute entre 2 et $8 \text{ m s}^{-1} \approx 30 \text{ km h}^{-1}$
- enfin, les grosses gouttes ($3 \text{ mm} < \text{diamètre} < 6 \text{ mm}$), semblables à des crêpes, ont une vitesse de chute entre 8 et $9 \text{ m s}^{-1} \approx 30 \text{ km h}^{-1}$. Instables, elles se fracturent souvent en plus petites gouttes.

On a donc ici une goutte de taille moyenne.

Exercice 3: Pesanteur apparente (★)

- Notons $\mathcal{R}_a$ le référentiel terrestre supposé galiléen et $\mathcal{R}_r$ le référentiel lié à l'ascenseur. Le référentiel $\mathcal{R}_r$ est à priori non galiléen car en translation rectiligne non uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}_a$. On note $\vec{a}_e = a_e \vec{e}_z$ son accélération par rapport au référentiel terrestre.

En prenant pour système le physicien $\{M(m)\}$ dans $\mathcal{R}_r$ non galiléen, on peut écrire la relation fondamentale de la dynamique sous la forme :

$$m \vec{a}_r = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie}$$

avec $\vec{R}$ la réaction du support (la balance ici), $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$ le poids et $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e = -ma_e \vec{e}_z$ avec $a_e > 0$ lorsque l'ascenseur accélère en montant.

Dans l'ascenseur, le physicien est statique donc $\vec{a}_r = \vec{0}$ soit

$$\vec{R} = -\vec{P} - \vec{f}_{ie} = (mg + ma_e) \vec{e}_z$$

Conclusion : lorsque l'ascenseur accélère ($a_e > 0$), au poids s'ajoute la force d'inertie d'entraînement et le physicien "pèse" plus lourd sur la balance. Inversement, si l'ascenseur décélère en montant ($a_e < 0$), il pèsera moins lourd sur la balance.

D'après l'énoncé, le physicien aura donc d'abord une phase d'accélération, ira à vitesse constante ($a_e = 0$) puis décélérera.

- On est dans cette situation en mouvement accéléré vers le bas donc $\vec{a}_e = a_e \vec{e}_z$ avec $a_e < 0$.

La relation précédente est toujours valable :

$$\vec{R} = -\vec{P} - \vec{f}_{ie} = (mg + ma_e) \vec{e}_z$$

sauf que $a_e < 0$ donc le physicien "pèsera" toujours moins sur la balance.

Exercice 4: Sismographe (★★)

1. Dans le référentiel du cadre $\mathcal{R}_C$ galiléen, $M(m)$ est à l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F}_r = \vec{0}$$

avec la force de rappel du ressort $\vec{F}_r = k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{e}_z$ soit en projection sur $\vec{e}_z$:

$$-mg + k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$$

pour trouver

$$\boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

Remarque : 2 méthodes pour exprimer la force de rappel du ressort à l'équilibre.

- $\vec{F}_r = -k\overrightarrow{M_0M_{eq}}$ avec M_0 la position du mobile lorsque le ressort est à vide (longueur ℓ_0). Ici, on peut décomposer par le point d'attache A et l'origine O :

$$\overrightarrow{M_0M_{eq}} = \overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM_{eq}} = \ell_0\vec{e}_z - \ell\vec{e}_z + 0\vec{e}_z$$

$$\text{soit } \vec{F}_r = k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{e}_z$$

- Soit utiliser une exprimer avec les longueurs directement :

$\vec{F}_r = -k(\ell_{eq} - \ell_0)\vec{u}$, avec $\vec{u}$ un vecteur unitaire du point d'attache (ici A) vers le point mobile (ici M_{eq} qui en passant n'est pas encore mobile) : $\vec{u} = -\vec{e}_z$.

2. Dans le référentiel du cadre $\mathcal{R}_C$ non galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{f}_{ie}$$

$$\text{or } \vec{F}_r = -k\overrightarrow{M_0M} = -k(\overrightarrow{M_0A} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) = -k(\ell_0 - \ell_{eq} + z)\vec{e}_z$$

et $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_{ie} = m\omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$. Soit en projection sur $\vec{e}_z$:

$$\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = -g + \frac{k}{m}(\ell_{eq} - \ell_0) + \omega^2 Z_0 \cos(\omega t)$$

or d'après la question précédente, on a $-g + \frac{k}{m}(\ell_{eq} - \ell_0) = 0$ donc

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{h}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t)}$$

3. La solution géénrale de l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$ s'écrit

$$z(t) = z_h(t) + z_p(t)$$

somme d'une solution homogène z_h et d'une solution particulière z_p .

La solution homogène est dite transitoire. Elle est solution de l'équation homogène

$$\ddot{z}_h + \frac{h}{m}\dot{z}_h + \frac{k}{m}z_h = 0$$

L'équation caractéristique $r^2 + \frac{h}{m}r + \frac{k}{m} = 0$ a un discriminant

$$\Delta = \left(\frac{h}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$$

La solution dite critique est celle qui correspond à $\Delta = 0$ soit

$$z_h = (At + B)e^{-\frac{h}{2m}t}$$

$\Delta = 0$ implique la relation

$$\left(\frac{h}{m}\right)^2 = 4\frac{k}{m} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{h}{m} = 2\omega_0}$$

L'intérêt du régime critique, c'est que sa durée caractéristique Δt_c est la plus petite possible.

4. En régime forcé, on se place à des temps $t \gg \Delta t_c$ donc la solution s'écrit

$$z(t) = z_p(t)$$

La solution particulière est du type du second membre, c'est-à-dire harmonique. On utilise alors la grandeur complexe $\underline{z} = \underline{z_m}e^{j\omega t}$ associée à $z(t)$ avec $\underline{z_m} = z_me^{j\varphi}$. L'équation différentielle s'écrit alors :

$$-\omega^2 \underline{z_m} + \omega_0^2 \underline{z_m} + j\omega \times 2\omega_0 \underline{z_m} = Z_0 \omega^2$$

soit

$$\boxed{\underline{z_m} = \frac{Z_0 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2j\omega\omega_0}}$$

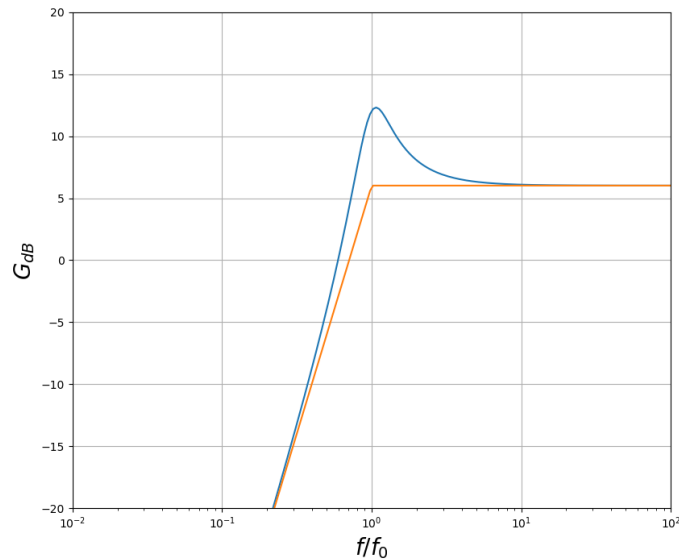
Son module

$$\boxed{|\underline{z_m}| = \frac{Z_0 \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega_0^2}}}$$

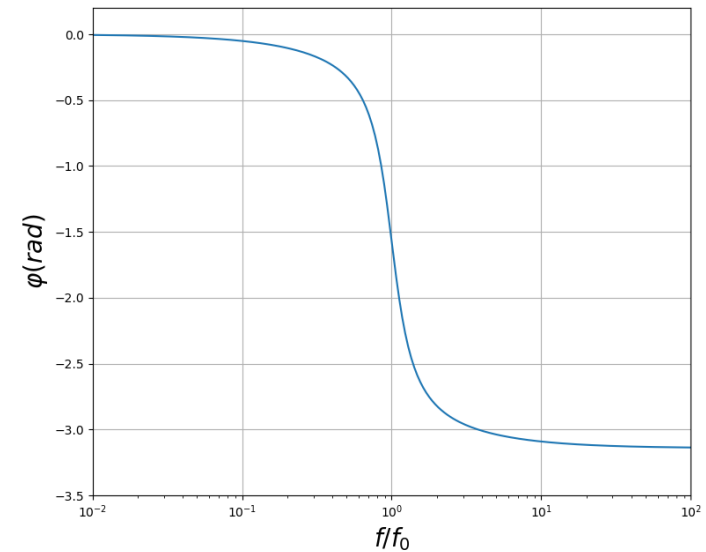
et son argument qui vérifie

$$\boxed{\tan(\varphi) = -\frac{2\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

5. L'amplitude :



avec $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{h}{4\pi m}$ et $Z_0 = 2$.
La phase φ :



Une réponse fidèle serait telle que le gain $G = Z_0$ ou $G_{dB} = 20 \log(Z_0)$ soit $\omega \gg \omega_0$. Or pour être au-delà du régime critique, on doit avoir $t \gg \frac{2m}{h}$ le temps caractéristique d'atténuation de la solution critique $z_h = (At + B)e^{-\frac{h}{2m}t}$. Soit des vibrations du sol avec une période T telle que

$$T \gg \frac{2m}{h} \Leftrightarrow \omega \ll \frac{h}{2m} \Leftrightarrow \boxed{\omega \ll \omega_0}$$

On est donc obligé de trouver un compromis car les deux conditions ne sont pas compatibles. $\omega \approx \omega_0$ pourrait être un compromis convenable.

Exercice 5: Oscillations en référentiel tournant (★★)

1. (a) Le référentiel (R) de l'anneau est non galiléen, car il est en rotation (uniforme) par rapport au référentiel terrestre galiléen.
- (b) Dressons le bilan des forces appliquées à M dans (R) :
 - le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;
 - la réaction normale de l'anneau $\vec{R} = R_r\vec{e}_r + R_z\vec{e}_z$;
 - la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e(M) = m\omega^2\overrightarrow{OM} = m\omega^2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM})$ soit

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 (r \cos(\alpha)\vec{e}_r - r \sin(\alpha)\vec{e}_\alpha + r\vec{e}_r) ;$$

— la force d'inertie de Coriolis $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c(M) = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_R = -2m\omega\vec{e}_z \wedge r\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha$ soit

$$\vec{f}_{ic} = 2m\omega r\dot{\alpha}\vec{e}_r$$

2. Appliquons le PFD à M dans (R) : $m\vec{a}(M)_R = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$.

En projection dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha, \vec{e}_z)$ il vient :

$$\begin{cases} R_r + m\omega^2 r(\cos(\alpha) + 1) + 2m\omega r\dot{\alpha} = -mr\dot{\alpha}^2 \\ -m\omega^2 r \sin(\alpha) = mr\ddot{\alpha} \\ -mg + R_z = 0 \end{cases}$$

car $\vec{a}(M)_R = -r\dot{\alpha}^2\vec{e}_r + r\ddot{\alpha}\vec{e}_\alpha$ (le mouvement étant circulaire). L'équation différentielle du mouvement est la deuxième (qui ne contient pas d'autre inconnue) :

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin(\alpha) = 0$$

3. (a) L'équilibre correspond à $\ddot{\alpha} = 0$ d'où $\sin(\alpha) = 0$, ce qui donne deux positions d'équilibre :

$\alpha = 0$ (point A) et $\alpha = \pi$ (point O).

(b) Pour le point A :

Supposons que M s'écarte légèrement de $\alpha = 0$: si $\alpha > 0$ alors $\sin(\alpha) > 0$ donc $\ddot{\alpha} < 0$, alors α aura tendance à diminuer, ce qui ramène M vers A ; même chose si $\alpha < 0$. Donc A est une position d'équilibre stable.

Pour le point O :

Supposons que M s'écarte légèrement de $\alpha = \pi$, soit $\alpha = \pi + \epsilon$: si $\epsilon > 0$ alors $\sin(\pi + \epsilon) = -\sin(\epsilon) < 0$ donc $\ddot{\alpha} > 0$, alors α aura tendance à augmenter, ce qui éloigne encore M de O ; même chose si $\epsilon < 0$. Donc O est une position d'équilibre instable.

4. (a) Pour $\alpha \ll 1$ (c'est-à-dire au voisinage de A), $\sin(\alpha) \approx \alpha$ donc l'équation différentielle devient : $\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0$. On reconnaît un oscillateur harmonique, donc la solution générale est $\alpha(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ d'où $\dot{\alpha}(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$.

Position à $t = 0$: $\alpha(0) = 0$ donc $A = 0$. Vitesse à $t = 0$: $\vec{v}(M)_{R_T} = \vec{0}$ soit $\vec{v}(M)_R + \vec{v}_e(M) = \vec{0}$ d'où $\vec{v}(M)_R = -\vec{v}_e(M) = -\vec{v}_e(A)_{R_T} = -2r\omega\vec{e}_y$; or $\vec{v}(M)_R = r\dot{\alpha}\vec{e}_\alpha$, donc $\dot{\alpha}(0) = -2\omega$, d'où $B = -2$.

Finalement : $\alpha(t) = -2 \sin(\omega t)$.

(b) α oscille entre -2 et 2 (en radians), donc ne vérifie pas l'approximation $\alpha \ll \epsilon$ (toujours radians).

En réalité, $|\sin(\alpha)| < |\alpha|$, donc $|\ddot{\alpha}| < \omega^2 |\alpha|$: l'accélération est toujours plus faible que dans l'approximation linéaire, donc l'amplitude réelle des oscillations est plus faible que celle qu'on avait calculée.

5. (a) Il y a deux forces conservatives, $\vec{P}$ et $\vec{f}_{ie}$. Énergie potentielle de pesanteur : $E_{pp} = mgz + cte = cte$ puisque $z = 0$. Le seul terme variable est donc l'énergie potentielle centrifuge : $E_{pcf} = -\frac{1}{2}m\omega^2 OM^2 + cte = -\frac{1}{2}m\omega^2(r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\pi - \alpha)) + cte$ soit

$$E_p = -m\omega^2 r^2(1 + \cos(\alpha)) + cte$$

Énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv(M)|R^2$ soit

$$E_c = \frac{1}{2}mr^2\dot{\alpha}^2$$

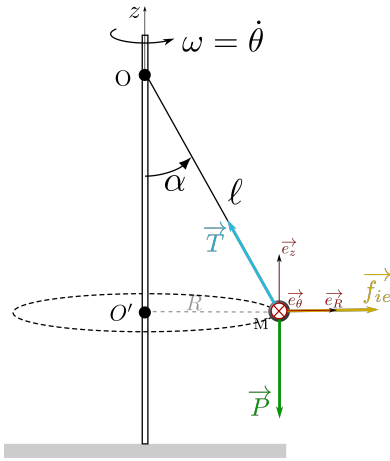
(b) Appliquons le théorème de l'énergie mécanique dans (R) en notant $\mathcal{P}(\vec{f}_{nc})$ la puissance des actions non conservatives : $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}_{nc})$. Or les deux forces non conservatives $\vec{R}$ et $\vec{f}_{ic}$ sont orthogonales à la vitesse (qui est selon $\vec{e}_\alpha$) donc leur puissance est nulle.

Ainsi, $\left. \frac{dE_m}{dt} \right|_R = -m\omega^2 r^2(-\dot{\alpha} \sin(\alpha)) + mr^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} = 0$ d'où après simplification :

$\dot{\alpha} = 0$ (solution particulière correspondant à l'équilibre) ou $\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin(\alpha) = 0$.

Exercice 6: Pendule conique (★★)

1. Le mobile est en équilibre dans un référentiel tournant autour de Δ à la vitesse angulaire ω .



2.

Bilan des forces :

— Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$.Force conservative : $E_{pp} = mgz + Cte = -mg\ell \cos(\alpha) + Cte$ — Tension du fil : $\vec{T} = -T\frac{\vec{OM}}{\ell}$. Cette force ne travaille pas car perpendiculaire au mouvement à chaque instant (le mouvement le plus général de M se fait à la surface d'une sphère de centre O et de rayon OM). Il n'y a donc pas lieu de définir une énergie potentielle.— Force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_{ie} = m\omega^2\vec{O'M}$ Déterminons le travail infinitésimal de $\vec{f}_{ie}$:

$$\delta W(\vec{f}_{ie}) = \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{OM}$$

En utilisant une base cylindrique $(\vec{e}_R, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, on a $d\vec{OM} = dR\vec{e}_R + Rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$ soit

$$\delta W(\vec{f}_{ie}) = m\omega^2 R\vec{e}_R \cdot (dR\vec{e}_R + Rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z) = m\omega^2 R dR = -dE_{pie}$$

On peut donc associer à $\vec{f}_{ie}$ une énergie potentielle

$$E_{pie} = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 + Cte = -\frac{1}{2}m\omega^2 \ell^2 \sin^2(\alpha) + Cte$$

3. Le pendule prendra une position d'équilibre correspondant à un extremum de l'énergie potentielle soit

$$\frac{dE_p}{d\alpha}(\alpha = \alpha_e) = mg\ell \sin(\alpha_e) - m\omega^2 \ell^2 \sin(\alpha_e) \cos(\alpha_e)$$

soit 2 solutions mathématiques pour $0 \leq \alpha_e < \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \alpha_e = 0 \\ \alpha_e = \arccos\left(\frac{g}{\ell\omega^2}\right) \end{cases}$$

 $\alpha_e = 0$ est sans intérêt et liée à l'hypothèse d'un mobile ponctuel.

$$\alpha_e = \arccos\left(\frac{g}{\ell\omega^2}\right)$$

On peut déterminer la stabilité de cette position d'équilibre en calculant la dérivée seconde de E_p :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_p}{d\alpha^2}(\alpha_e) &= mg\ell \cos(\alpha_e) - m\omega^2 \ell^2 \cos(2\alpha_e) \\ &= m\ell^2 \omega^2 (\cos^2(\alpha_e) - \cos(\alpha_e)) \\ &= m\ell^2 \omega^2 (1 - \cos^2(\alpha_e)) > 0 \end{aligned}$$

C'est donc pour $0 < \alpha_e < \frac{\pi}{2}$ un équilibre stable.**Exercice 7: Régulateur à boules (★★)**

1. Le système {régulateur} dans le référentiel tournant non galiléen possède une énergie potentielle :

$$E_p = E_{pp} + E_{pel} + E_{pie}$$

avec E_{pp} l'énergie potentielle de pesanteur des boules, E_{pel} l'énergie potentielle élastique du ressort et E_{pie} l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement car le référentiel est non galiléen. On rappelle que la force de Coriolis ne travaille pas donc il n'y a pas d'énergie potentielle associée.

$$E_{pp} = mgz + 2mg(z + d\cos(\theta))$$

$$E_{pie} = 2 \times -\frac{1}{2}m\Omega^2 \times (d\sin(\theta))^2$$

$$E_{pel} = \frac{1}{2}k(z - 2d)^2$$

Nous pouvons relier z et θ dans le losange formé par les trois boules. On exprime de 2 façons différentes la hauteur du losange :

$$(4d - z) = 2d \cos(\theta)$$

donc

$$\boxed{z = 4d - 2d \cos(\theta)}$$

On en déduit une expression de l'énergie potentielle en fonction de θ :

$$E_p(\theta) = 2d \left[6mg + kd - \frac{1}{2}m\Omega^2 d - (2mg + kd) \cos(\theta) + \left(kd + \frac{1}{2}m\Omega^2 d \right) \cos^2(\theta) \right]$$

2. À l'équilibre, $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$, soit :

$$(2mg + kd) \sin(\theta) - 2 \left(kd + \frac{1}{2}m\Omega^2 d \right) \sin(\theta) \cos(\theta) = 0$$

soit

$$\sin(\theta) [(2mg + kd) - (m\Omega^2 d + 2kd) \cos(\theta)] = 0$$

$$\text{soit } \boxed{\sin(\theta) = 0} \text{ ou } \boxed{\cos(\theta) = \frac{2mg + kd}{m\Omega^2 d + 2kd}}.$$

La première solution donne $\boxed{\theta = 0}$. La seconde solution n'est possible que si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (contraintes de construction du régulateur) soit $0 \leq \cos(\theta) \leq 1$ ou $\boxed{2mg + kd \leq m\Omega^2 d + 2kd}$.

Exercice 8: Navette spatiale (★★)

1. Dans un référentiel galiléen, tout corps isolé ou pseudo-isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Le référentiel géocentrique est le référentiel dont l'origine est le centre de masse de la Terre et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes.

Ce référentiel peut être considéré comme galiléen si on peut négliger son mouvement de translation par rapport au référentiel héliocentrique, donc sur une échelle de temps faible devant une année.

2. Définition du moment cinétique : $\vec{L} = \overrightarrow{OS} \wedge M_s \vec{v}(S)_{\mathcal{R}_0}$

Le point matériel S n'est soumis qu'à une force centrale. D'après le théorème du moment cinétique en O dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ galiléen :

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{M}_O(\vec{F}(S)) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{L} = \text{cste}}$$

3. Par définition du moment cinétique, la trajectoire est à tout instant orthogonale à $\vec{L}$. Comme $\vec{L}$ garde une direction constante, cette trajectoire est plane. Le plan est défini par les conditions initiales $(O, \vec{R}(t=0), \vec{v}(S)(t=0))$.

4. Dans le cas d'une trajectoire circulaire, la vitesse de S s'écrit :

$$\vec{v}(S) = R\omega \vec{e}_\theta = \vec{R} \wedge \vec{\omega} \quad ; \quad \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

On exprime le moment cinétique :

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge (M_S \vec{R} \wedge \vec{\omega}) = m_S R^2 \vec{\omega} = \text{cste} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{\omega} = \text{cste}}$$

5. D'après la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{GM_T}{R^3}}}$$

6. $\mathcal{R}$ a un mouvement de rotation uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$:

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{OM} = -\omega^2 (\vec{R} + \vec{r}) \quad ; \quad \boxed{\vec{f}_{ie} = m\omega^2 (\vec{R} + \vec{r})}$$

7. La force de Coriolis : $\boxed{\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}}$

8. Expression de la force gravitationnelle :

$$\vec{F} = -\frac{mM_T G}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} \overrightarrow{OM} = -\frac{mM_T G}{\|\overrightarrow{OM}\|^3} (\vec{R} + \vec{r})$$

Exprimons $\|\overrightarrow{OM}\|$ au premier ordre en r/R :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM})^{1/2} = ((\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM})^2)^{1/2} = (R^2 + r^2 + 2\vec{r} \cdot \vec{R})^{1/2} \approx R \left(1 + \frac{2x}{R} \right)^{1/2} \approx R \left(1 + \frac{x}{R} \right)$$

$$\vec{F} = -\frac{mM_T G}{R^3} \left(1 + \frac{x}{R} \right)^{-3} (\vec{R} + \vec{r}) = -m\omega^2 \left(1 - 3\frac{x}{R} \right) (\vec{R} + \vec{r}) = -m\omega^2 \left(\vec{R} + \vec{r} - 3\frac{x}{R} \vec{R} \right)$$

Le terme en $-3x\vec{r}/R$ est d'ordre 2 en r/R . De plus $\vec{R} = R\vec{u}_x$.

$$\vec{F} = -m\omega^2 (\vec{R} + \vec{r} - 3x\vec{u}_x)$$

9. Le mouvement de M est plan, donc $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y$. Expression de la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{f}_{ic} = -2m\omega\vec{u}_z \wedge (\dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y) = 2m\omega(\dot{y}\vec{u}_x - \dot{x}\vec{u}_y)$$

La force d'inertie d'entraînement s'exprime :

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2(\vec{R} + \vec{r}) = m\omega^2((R+x)\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$$

La force gravitationnelle s'exprime :

$$\vec{F} = -m\omega^2((R-2x)\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$$

On applique le PFD dans $\mathcal{R}$ non galiléen :

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{f}_{ic} + \vec{f}_{ie} + \vec{F}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega\dot{y} + 3\omega^2x \\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x} \end{cases}$$

10. On intègre la seconde équation, avec la condition initiale $\dot{y}(0) = 0$ et $x(0) = 0$:

$$\dot{y} = -2\omega x$$

On remplace dans la première équation :

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

On utilise les conditions initiales :

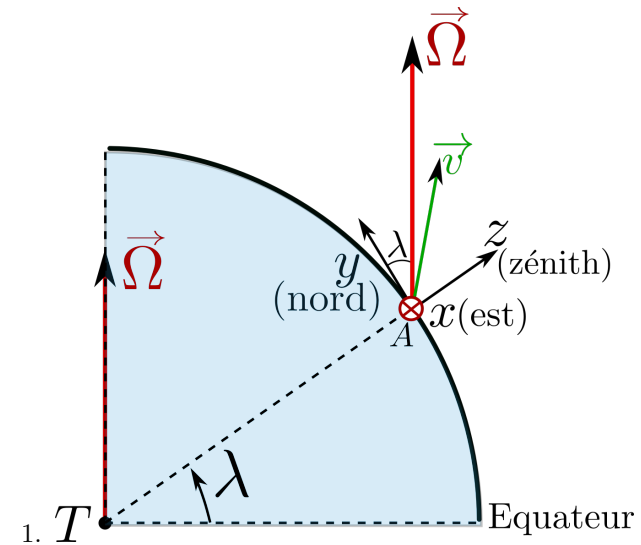
$$x(0) = 0 = A \quad ; \quad \dot{x}(0) = -v_0 = B\omega$$

$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad ; \quad y(t) = \frac{2v_0}{\omega}(1 - \cos(\omega t))$$

On trouve l'équation d'une ellipse de centre $(0, y_0)$, de demi-grand axe a et de demi-petit axe b :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad a = \frac{v_0}{\omega} \quad ; \quad y_0 = b = \frac{2v_0}{\omega}$$

Exercice 9: Tir balistique (***)



$$\vec{\Omega} = \Omega \cos(\lambda) \vec{e}_y + \Omega \sin(\lambda) \vec{e}_z$$

2. Dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ non galiléen en rotation autour de $\mathcal{R}_g$:

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_{ic} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

Remarque : attention, la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}$ est déjà incluse dans le poids $m\vec{g}$.

En projection :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\Omega (\cos(\lambda)\dot{z} - \sin(\lambda)\dot{y}) \\ m\ddot{y} = -2m\Omega \sin(\lambda)\dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\Omega \cos(\lambda)\dot{x} \end{cases}$$

3. Par intégration de l'équation suivant $\vec{e}_y$, on a :

$$\dot{y} = -2\Omega \sin(\lambda)x + Cte$$

avec $Cte = v_0 \cos(\alpha)$ d'après les conditions initiales.

De même suivant $\vec{e}_z$:

$$\dot{z} = -gt + 2\Omega \cos(\lambda)x + Cte$$

avec $Cte = v_0 \sin(\alpha)$ d'après les conditions initiales.

On en déduit l'expression de $\ddot{x}$ demandée :

$$\begin{aligned}\ddot{x} = & -2\Omega \cos(\lambda) (-gt + 2\Omega \cos(\lambda)x + v_0 \sin(\alpha)) \\ & + 2\Omega \sin(\lambda) (-2\Omega \sin(\lambda)x + v_0 \cos(\alpha))\end{aligned}$$

soit

$$\ddot{x} = -4\Omega^2 x + 2\Omega \cos(\lambda)gt - 2v_0\Omega \sin(\alpha) \cos(\lambda) + 2v_0\Omega \cos(\alpha) \sin(\lambda)$$

4. $\Omega \approx 1 \times 10^{-4}$, $x \approx 100$, $g \approx 10$ et $t \approx 60$. On peut en déduire l'ordre de grandeur des termes :

- $4\Omega^2 x \approx 4 \times 10^{-6}$
- $2\Omega \cos(\lambda)gt \approx 1 \times 10^{-2}$
- $2v_0\Omega \sin(\alpha) \cos(\lambda) \approx 1 \times 10^{-1}$

On peut donc négliger le premier terme $4\Omega^2 x$ devant les autres pour obtenir une expression approchée

$$\ddot{x} = 2\Omega \cos(\lambda)gt + 2v_0\Omega (\cos(\alpha) \sin(\lambda) - \sin(\alpha) \cos(\lambda))$$

Par intégration :

$$\dot{x} = \Omega \cos(\lambda)gt^2 + 2v_0\Omega (\cos(\alpha) \sin(\lambda) - \sin(\alpha) \cos(\lambda)) t$$

Par intégration :

$$x = \frac{1}{3}\Omega \cos(\lambda)gt^3 + v_0\Omega (\cos(\alpha) \sin(\lambda) - \sin(\alpha) \cos(\lambda)) t^2$$

5. On en déduit une expression approchée de $\dot{z}$:

$$\begin{aligned}\dot{z} = & -gt + 2\Omega \cos(\lambda)x + v_0 \sin(\alpha) \\ = & -gt + 2\Omega \cos(\lambda) \left(\frac{1}{3} \right) \Omega \cos(\lambda)gt^3 + v_0\Omega (\cos(\alpha) \sin(\lambda) - \sin(\alpha) \cos(\lambda)) t^2 \\ & + v_0 \sin(\alpha)\end{aligned}$$

soit par intégration :

$$\begin{aligned}z = & -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{g\Omega^2 \cos^2(\lambda)}{6}t^4 \\ & + \frac{2v_0\Omega^2 (\cos(\alpha) \sin(\lambda) - \sin(\alpha) \cos(\lambda))}{3}t^3 \\ & + v_0 \sin(\alpha)t\end{aligned}$$

Une résolution numérique (calculatrice, mode solveur par exemple) donne $t_s = 144 \text{ s}$.

6. $x(t_s) = 320 \text{ m}$.

7. On a effectivement ici une déviation vers l'est donc la droite de la trajectoire.