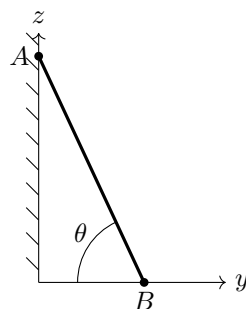


TD 3 : Frottement solide

Exercice 1: Équilibre d'une échelle (*)

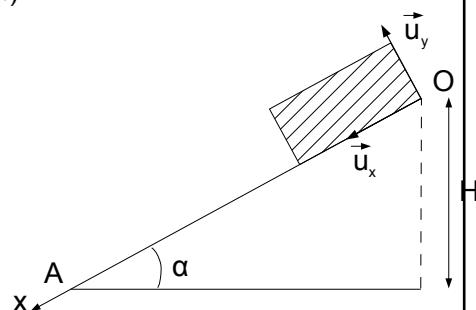
On considère une échelle AB (de masse m et de longueur $2l$) sur laquelle monte une personne de masse M . L'échelle s'appuie en A sans frottement sur un mur vertical et en B sur le sol avec un coefficient de frottement échelle-sol f . On appelle θ l'angle entre l'échelle et le sol horizontal.



1. Déterminer la condition sur θ pour que l'échelle reste en équilibre quelle que soit la position de la personne.

Exercice 2: Mobile sur un plan Incliné (*)

Un solide supposé ponctuel de masse m est déposé à l'extrémité supérieure d'un plan incliné d'angle α , sans vitesse initiale. On note H la hauteur de ce point initial O et g l'accélération de la pesanteur.

**2.1 Absence de Frottement**

1. Déterminez l'accélération $a = \ddot{x}$ du mobile à l'instant t en absence de frottement.
2. En déduire la vitesse $v = \dot{x}(t)$ et la position $x(t)$ et déterminer la vitesse du mobile lorsqu'il arrive au point A .

2.2 Existence de frottements solides ()**

Dans cette partie, on ajoute uniquement la prise de compte d'une force de frottement solide dont les coefficients de frottement statiques et dynamiques sont notés f_0 et f respectivement.

3. A quelle condition sur le coefficient f_0 de frottement statique le solide commence-t-il à glisser à $t = 0$?
4. On note f le coefficient de frottement dynamique. Quelle relation existe-t-il entre R_T et R_N et f lorsque le mobile se met en mouvement ? Reprendre ensuite la question 2

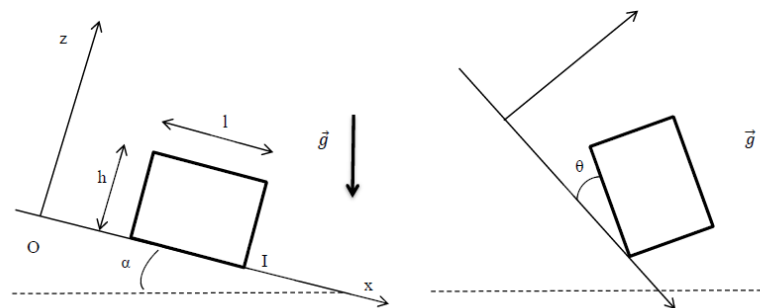
Exercice 3: Bloc sur un plan incliné ()**

On considère un bloc de masse M , de longueur l (égale à sa largeur) et de hauteur h , reposant sur un plan initialement horizontal.

Le contact entre le bloc et le plan est caractérisé par un coefficient de frottement f , avec $0 < f < 1$.

On augmente progressivement l'angle α que fait le plan avec l'horizontale.

On modélise le basculement éventuel du bloc par un pivotement sans glissement autour de la génératrice de contact passant par I . On note $J_{(Iy)}$ le moment d'inertie du bloc autour de cet axe.



1. On ignore la possibilité de basculement. À quelle condition sur α y a-t-il glissement ?
2. À quelle condition sur α y a-t-il basculement sans glissement ?
3. En déduire la condition sur les dimensions du bloc pour qu'il glisse sans avoir préalablement basculé. Application numérique pour $f = 0,5$.

Exercice 4: L'arc-boutement (*)

Un cylindre de masse m s'appuie en I sur un mur vertical. Le contact entre le cylindre et le mur est caractérisé par un coefficient de frottement f .

Un fil inextensible relie le centre de masse G du cylindre à un point fixe O situé sur le mur. Le fil fait un angle α avec la verticale.

On cherche à provoquer le glissement du cylindre en exerçant, au point J diamétralement opposé au point de contact I , une force verticale $\vec{F}$ dirigée vers le bas.

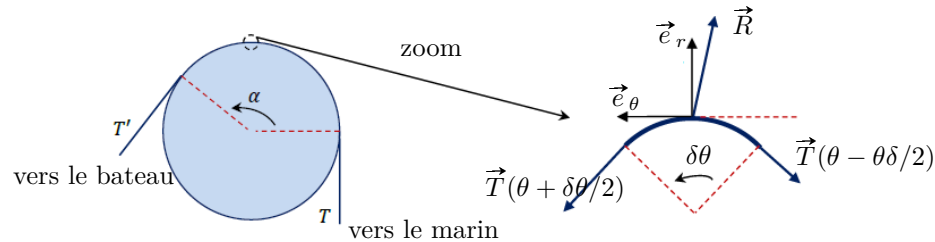
1. Exprimer F_0 , la norme de la force $\vec{F}$ juste suffisante pour provoquer le glissement du cylindre.
2. Montrer que si le coefficient de frottement f est supérieur à une valeur critique que l'on exprimera en fonction de l'angle α , il devient impossible de provoquer le glissement du cylindre, quelle que soit l'intensité de la force $\vec{F}$.

Exercice 5: Un bon cerveau vaut mieux que du muscle (★★)

Une corde, supposée de masse négligeable et sans raideur, est enroulée autour d'une bitte d'amarrage sur un angle α . Le coefficient de frottement de Coulomb entre la corde et la bitte est f .

Les tensions exercées aux deux extrémités sont notées respectivement T (côté marin) et T' (côté bateau).

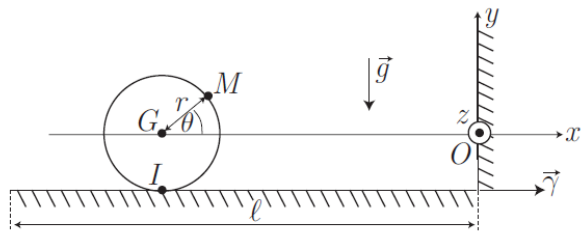
On suppose le problème horizontal.



1. Appliquer la seconde loi de Newton à l'élément de corde de longueur $Rd\theta$, avec R le rayon de la bitte d'amarrage. On se place dans le cas d'absence de glissement. En se limitant au premier ordre en $\delta\theta$, exprimer le rapport T'/T en fonction de α et f .
2. Expliquer pourquoi une personne peut retenir un bateau avec un faible effort.

Exercice 6: Roulement d'un cylindre dans un camion (★★)

Un cylindre roule sans glisser sur le plateau, de longueur ℓ , d'un camion qui démarre avec une accélération $\vec{\gamma} = \gamma \vec{e}_x$. On définit le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$ le référentiel lié au camion de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.



Le cylindre est homogène, de masse m , de centre de masse G , de rayon r et de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}mr^2$ par rapport à son axe (Gz) . On repère G par la coordonnée x . La rotation du cylindre est repérée par θ .

Initialement le cylindre est contre l'axe vertical (Oy) .

1. On suppose que le cylindre roule sans glisser. Exprimer la distance D parcourue par le camion lorsque le cylindre commence à tomber du plateau.
2. Quelle est la condition sur $\vec{\gamma}$ pour que le roulement soit sans glissement ?

Exercice 7: Expérience de Timochenko (★★)

Deux cylindres de rayon b tournent très vite autour de leurs axes Δ_1 et Δ_2 , en sens inverse et à vitesse angulaire constante $\vec{\omega}_1 = -\omega \vec{e}_z$ et $\vec{\omega}_2 = \omega \vec{e}_z$.

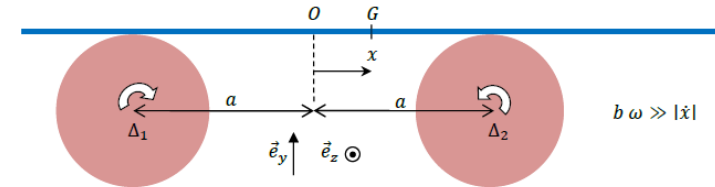
On pose une planche de masse m et d'épaisseur négligeable sur les deux cylindres. Initialement, la position du centre de masse est $x = x_0$ et la vitesse est nulle : $\dot{x} = 0$.

Le coefficient de frottement entre la planche et chacun des cylindres est noté f .

On constate expérimentalement que la planche effectue un mouvement oscillatoire sinusoïdal sans jamais décoller des cylindres.

On décompose la réaction exercée par le cylindre i sur la planche sous la forme

$$\vec{R}_i = R_{iT} \vec{e}_x + R_{iN} \vec{e}_y.$$

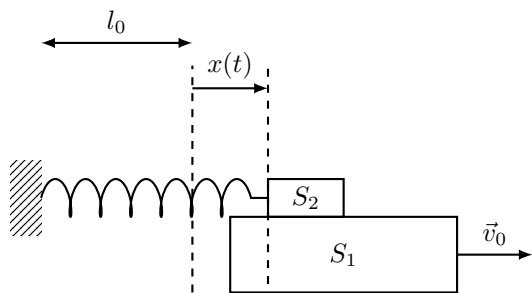


1. Montrer que la planche glisse nécessairement sur les cylindres. En déduire les expressions de R_{1T} et R_{2T} en fonction de R_{1N} , R_{2N} et f . On suppose que $b\omega \gg |\dot{x}|$.
2. Montrer que $x(t)$ vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique. Comment peut-on exploiter cette expérience afin d'évaluer le coefficient de frottement f ?
3. Déterminer la condition pour que la planche ne décolle jamais des cylindres.

Exercice 8: Stick-slip et vibrations d'une corde de violon (★★)

Le mouvement d'une corde de violon déplacée par un archet fait apparaître une alternance de phase d'adhérence et de glissement ("stick-slip") : video.

Pour étudier cette situation, nous utiliserons la modélisation suivante :



Le solide S_1 est entraîné à une vitesse constante $\vec{v}_0$ par un moteur. Le solide S_2 frotte sur S_1 et est retenu à gauche par un dynamomètre qui est ici représenté par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 .

On appelle f_s le coefficient de frottement statique entre les deux solides, et f_d le coefficient de frottement dynamique. La masse de S_2 est notée m .

Ce mouvement de stick-slip peut aussi modéliser le crissement d'une craie sur un tableau (ou d'une chaise sur le sol). La hauteur du son émis est alors directement liée à la fréquence du phénomène de stick-slip.

L'objectif de l'exercice est de comprendre la situation étudiée et de prédire la fréquence du phénomène de stick-slip en fonction des différents paramètres de l'expérience. La partie numérique se fera en TP en complétant le `jupyternotebook`.

Modélisation

1. Dans la modélisation, quel solide (S_1 ou S_2) joue le rôle de la corde ? de l'archet ? Qui joue le rôle du ressort dans la situation réelle ? Quelle est la différence entre la situation réelle de la vidéo et la situation modélisée ?
2. Représenter sur le schéma les différentes forces s'appliquant sur S_2 .
3. On suppose que le solide S_1 est en situation d'adhérence. Que vaut alors $v = \frac{dx}{dt}$? À quelle condition sur x sort-on de l'adhérence et entre-t-on en glissement ?
4. Lorsque S_1 est en situation de glissement, quelle est l'équation différentielle vérifiée par x ? À quelle condition sur $v = \frac{dx}{dt}$ sort-on de la situation de glissement ? On exprimera cette condition d'abord sous forme d'une égalité, puis d'une inégalité.

Résolution numérique

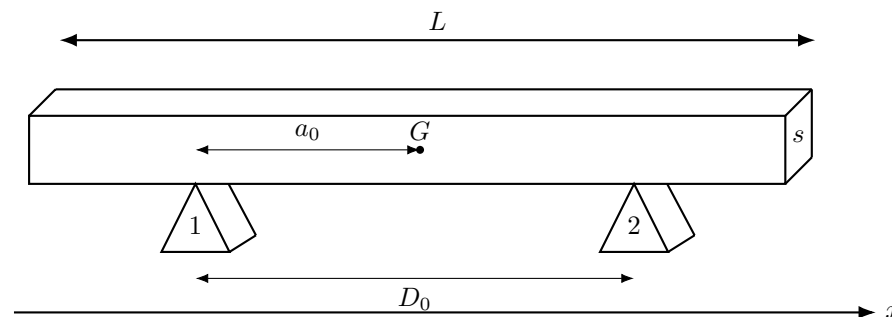
On s'aperçoit ainsi que selon l'état (adhérence ou glissement) du système, l'équation à résoudre pour déterminer l'évolution de $x(t)$ diffère : comme ces états vont se succéder, il faudra à chaque fois résoudre les équations, en prenant en compte les continuités de x et $\frac{dx}{dt}$ pour raccorder les solutions. Ce travail, s'il est possible, est toutefois laborieux et la résolution numérique va nous permettre ici de visualiser rapidement le mouvement du solide S_2 .

Ouvrir le `jupyternotebook` et le compléter. Vous l'imprimerez en fin de séance.

Exercice 9: Analyse d'un mouvement « collé-glissé » (stick-slip) (*)**

Analyse théorique

Une poutre rigide et homogène, de longueur L , de masse m et de section carrée s , est posée en équilibre à l'horizontale sur deux supports (numérotés 1 et 2) séparés de la distance D_0 .



Les coefficients de frottement solide statique et dynamique entre cette poutre et chacun des supports sont respectivement f_s et f_d , avec $f_s > f_d$. Le centre de gravité G de la poutre se trouve initialement à la distance horizontale a_0 du support 1, avec $a_0 < D_0/2$.

On suppose que la section s de la poutre est négligeable.

1. La poutre est immobile. Exprimer les forces de réaction verticales des supports sur la poutre, R_{N1} et R_{N2} , en fonction des données du problème.

Les supports 1 et 2 sont maintenant animés l'un vers l'autre de vitesses horizontales et constantes, respectivement $v_0/2$ et $-v_0/2$ selon (Ox) . La poutre ne peut se déplacer qu'en translation horizontale selon cette même direction.

La distance entre les deux supports s'écrit donc $D(t) = D_0 - v_0 t$.

On note $x(t)$ la position du point G et $a(t)$ la distance entre le support 1 et le centre de gravité G de la poutre.

- Que deviennent les forces $R_{N1}(t)$ et $R_{N2}(t)$ en fonction de $a(t)$, distance horizontale entre le centre de gravité G de la poutre et le support 1 à l'instant t ?
- On suppose que la poutre glisse d'abord par rapport à un seul des deux supports. Préciser lequel; déterminer les forces horizontales de frottement, de normes $F_1(t)$ et $F_2(t)$, qui agissent sur la poutre lors de cette phase du mouvement.
- Montrer que ce mouvement ne peut se perpétuer, et qu'il existe un instant t_1 où la poutre se met à glisser sur l'autre support. Déterminer la distance $D_1 = D(t_1)$ en fonction de a_0 , f_s et f_d .
- Justifier qu'il existe alors une phase du mouvement où nécessairement il y a glissement sur les deux supports. Exprimer alors la somme des forces de frottement en fonction de $a(t)$, $D(t)$ et des constantes du problème. Dans quel sens agit-elle? Donner le critère qui détermine la fin de cette seconde phase en précisant le support sur lequel le glissement cesse. On note t'_1 l'instant correspondant.
- Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ pour $t \in [t_1, t'_1]$.
- Décrire la phase suivante du mouvement. Elle se termine à l'instant t_2 . Montrer que

$$D(t_2) = \left(1 + \frac{f_d}{f_s}\right) (D(t'_1) - a(t'_1)).$$

- On admettra que, pour une faible vitesse de rapprochement des supports et une distance a_0 suffisamment grande, les modifications de $D(t)$ et de $a(t)$ durant la phase transitoire de glissement restent faibles en valeur relative. En les négligeant, montrer que

$$D(t_2) \approx \frac{f_d}{d_s} D(t_1).$$

En déduire un moyen simple d'évaluer le rapport f_d/f_s .

Simulation

Le but de la simulation est de traiter les quatre phases consécutives

- $t \in [0, t_1]$: adhérence sur le support 1 et glissement sur le support 2;
- $t \in [t_1, t'_1]$: glissement sur les supports 1 et 2;
- $t \in [t'_1, t_2]$: glissement sur le support 1 et adhérence sur le support 2;
- $t \in [t_2, t'_2]$: glissement sur les supports 1 et 2.

On cherchera à comparer des valeurs obtenues numériques et théoriquement.

Ouvrir le [jupyternotebook](#) et le compléter. Vous l'imprimerez en fin de séance.

Éléments de réponses :

Exercice 1

$$Q0 : \tan \theta \geq \frac{m+2M}{2f(m+M)}$$

Exercice 2

$$Q4 : \text{on trouve } v_{A, \text{frottsol}} = \sqrt{2gH(1 - \frac{f}{\tan \alpha})}$$

Exercice 3

$$Q2 : \tan \alpha > \frac{l}{h}$$

Exercice 4

$$Q1 : F_0 = \frac{fmg \tan \alpha}{1 - 2 \tan \alpha}$$

Exercice 5

$$Q1 : \frac{dT}{d\theta} = f T(\theta)$$

Exercice 6

$$Q1 : D = \frac{3}{2}(\ell - r)$$

Exercice 7

$$Q2 : \ddot{x} + \frac{fg}{a} x(t) = 0$$

$$Q3 : x_0 < a$$

Exercice 9

$$Q2 : R_{N1} = mg \frac{D(t) - a(t)}{D(t)} \text{ et } R_{N2} = mg \frac{a(t)}{D(t)}$$

$$Q3 : F_1 = F_2 = f_d mg \frac{a_0}{D_0 - v_0 t}$$

$$Q4 : D_1 = a_0 \left(1 + \frac{f_d}{f_s}\right) \text{ et } t_1 = \frac{f_s D_0 - a_0(f_d + f_s)}{f_s v_0}$$

$$Q5 : \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = f_d mg \frac{D(t) - 2a(t)}{D(t)} \vec{e}_x$$