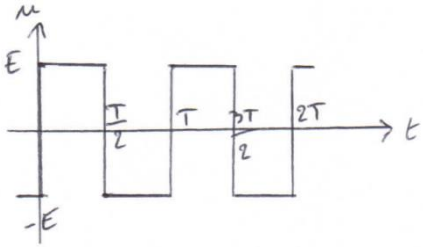
Pb1 : Banque PT 2025 - Utilisation de panneaux solaires

Partie I : Régulation Conversion continu-alternatif : nécessité d'un onduleur

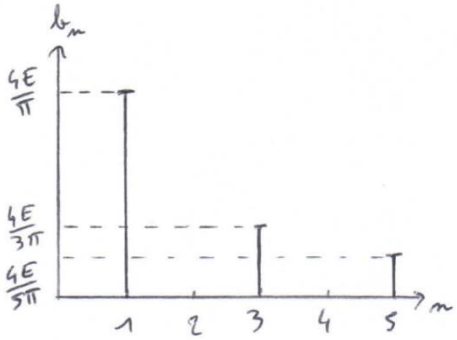
Q1. Pour $nT < t < \left(n+\frac{1}{2}\right)T$, K_1 et K_3 sont fermés donc $u(t) = E$.

Pour $(n+\frac{1}{2})T < t < (n+1)T$, K_2 et K_4 sont fermés donc $u(t) = -E$.

D'où le tracé ci-contre :

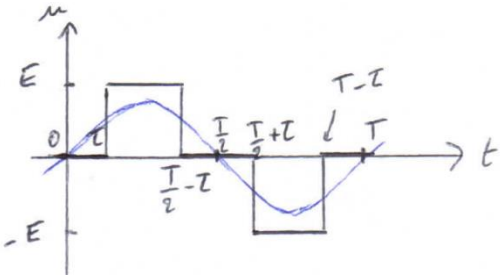


Q2. Tracé du spectre :



Q3. Dessiner les circuits, on en déduit le tracé :

(Le fondamental a été rajouté pour répondre à la question Q5)



Q4. On rappelle les définitions de la valeur moyenne $U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$

et de la valeur efficace $U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$.

Pour le signal u(t) de Q3, $U_0 = 0$ et $U_{eff} = \sqrt{\frac{E^2}{T}\left[\left(\frac{T}{2}-2\tau\right)+\left(\frac{T}{2}-2\tau\right)\right]} = E\sqrt{1-4\frac{\tau}{T}}$

Q5. Voir tracé du fondamental sur le graphe en Q3.

Q6. La première harmonique à priori non nulle (fondamental exclu) est l'harmonique de rang n = 3. Son amplitude est $b_3 = \frac{4E}{3\pi}\cos(6\pi f\tau)$. La plus petite valeur de τ pour laquelle elle est nulle est $\tau = \frac{1}{12f} = 1{,}7\ ms$

Q7. On prend la tension aux bornes de R pour supprimer les harmoniques élevées car le circuit R-L pris aux bornes de R constitue en filtre passe-bas. On pourrait aussi faire remarquer que la tension aux bornes de L peut présenter des discontinuités (donc des fréquences élevées) tandis que le courant i dans L est continu donc la tension $v = Ri$ est plus lisse.

Q8. La fonction de transfert de ce filtre est $\underline{H} = \frac{v}{u} = \frac{R}{R+jL\omega} = \frac{1}{1+j\frac{L}{R}\omega}$.

C'est un filtre passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure $f_c = \frac{R}{2\pi L}$.

Q9. Il faut une valeur de L pas trop petite pour que la fréquence de coupure ne soit pas trop grande et que les harmoniques d'ordre supérieur à 3 soient coupés. Mais si L est trop grande la fréquence de coupure est trop petite et le fondamental de fréquence f = 50 Hz est trop atténué. Il faut donc faire un compromis.

Q10. Si on choisit f = f_c = 50 Hz, alors le fondamental est atténué de 3 dB (bien inférieur à 4 dB), et l'harmonique 5 est atténuée de $G_{dB}(5f) = 10log\left(\frac{1}{\sqrt{1+5^2}}\right) = -10\log(26) = -14{,}1\ dB < 14\ dB$.

Le cahier des charges est bien respecté.

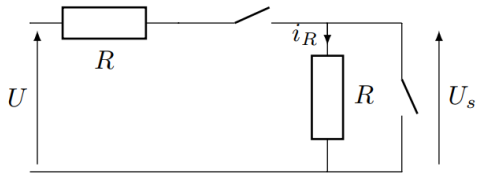
Pour R = 100 Ω, $L = \frac{R}{2\pi f_c} = 0{,}32\ H$

Q11. Pour atténuer encore davantage les harmoniques résiduelles , on pourrait choisir un filtre passe-bas d'ordre 2 (ou supérieur) de fréquence de coupure f = f_c ou un filtre passe bande d'ordre 2 très sélectif de fréquence centrale f.

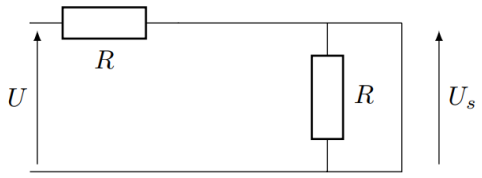
Pb 2 : Centrale 2022 MP - Filtrage analogique et numérique

Q31. À basse fréquence, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et à haute fréquence, il se comporte comme un fil. Considérons le **filtre A** :

Basses fréquences : le courant est nul dans les deux branches ouvertes, le courant i_R est donc également nul d'après la loi de nœuds. Ainsi $U_s = Ri_R = 0$.



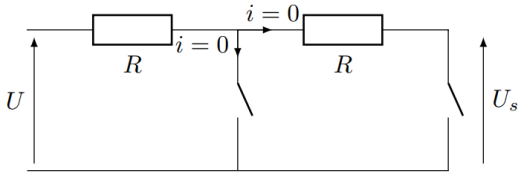
Hautes fréquences : la tension aux bornes d'un fil est nul ainsi $U_s = 0$.



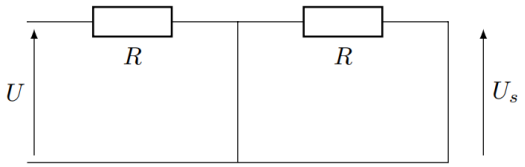
Le filtre A présente un comportement **passe-bande**.
Dans le **filtre B**, la tension U_s est la différence entre l'entrée et la tension de sortie du filtre A. Le filtre A étant passe-bande, le filtre B présente un comportement **réjecteur de bande**.

Considérons le **filtre C** :

Basses fréquences : le courant est nul dans les deux branches ouvertes, le courant dans la première résistance l'est donc également d'après la loi de nœuds. D'après la loi des mailles, $U_s + 0 + 0 = U$. Ainsi $U_s = U$.

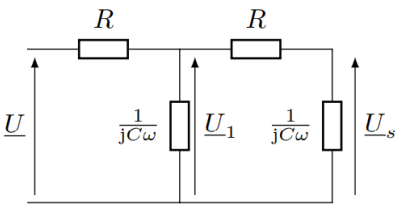


Hautes fréquences : la tension aux bornes d'un fil est nul ainsi $U_s = 0$.



Le filtre C présente un comportement **passe-bas**. C'est le **filtre C** qui est adapté.

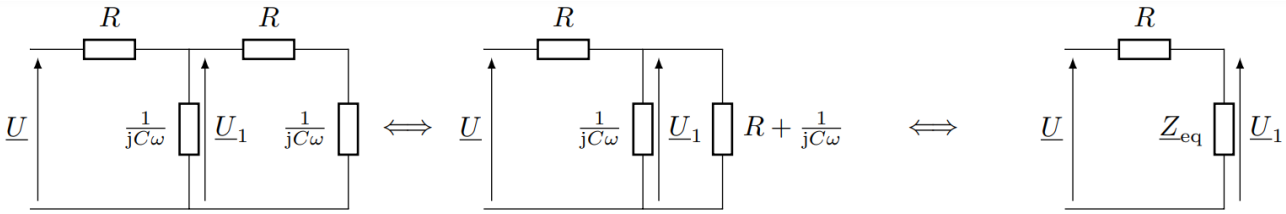
Q32. On refait le circuit en remplaçant les tensions par leurs amplitudes complexes et les composants par leurs impédances :



Commençons par déterminer la relation entre $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_s$:

$$\underline{U}_s = \frac{1/(jC\omega)}{1/(jC\omega) + R}\underline{U}_1 = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{U}_1$$

Il faut ensuite trouver la relation entre $\underline{U}_1$ et $\underline{U}$. Comme C et R ne sont pas parcourues par le même courant, on ne peut pas appliquer directement un pont diviseur de tension :



$\underline{Z}_{\text{eq}}$ et R sont parcourus par le même courant, on peut donc appliquer le pont diviseur :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R}\underline{U} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z}_{\text{eq}}}}\underline{U}$$

avec :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \mathrm{j}C\omega + \frac{1}{R + 1/(\mathrm{j}C\omega)}$$

Ainsi :

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{1 + R\left(\mathrm{j}C\omega + \frac{1}{R+1/(\mathrm{j}C\omega)}\right)}\underline{U}$$

$$\underline{U}_s = \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{U}_1 = \frac{1}{1 + 3\mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}RC\omega)^2}\underline{U}$$

Q33. Pour effacer les fréquences au-dessus de 1 Hz (fc = 1 Hz) soit 1/(RC) = 2π rad ·s^{-1} ,

en choisissant par exemple C = 1 µF , on doit choisir R = $\frac{1}{2\pi C f_c}$ =1,6.10^2 kΩ .

Q34.

L'écriture :

$$\underline{U}_s = \frac{1}{1 + 3\mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}RC\omega)^2}\underline{U}$$

devient en réel, avec $\tau = RC$:

$$u(t) = u_s(t) + 3\tau\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \tau^2\frac{\mathrm{d}^2u_s}{\mathrm{d}t^2}$$

Avec :

$$\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} = \frac{U_{s(k+1)} - U_{sk}}{T_e} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2u_s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{U_{s(k+1)} + U_{s(k-1)} - 2U_{sk}}{T_e^2}$$

Ainsi :

$$U_k = U_{sk} + \frac{3\tau}{T_e}\left(U_{s(k+1)} - U_{sk}\right) + \frac{\tau^2}{T_e^2}\left(U_{s(k+1)} + U_{s(k-1)} - 2U_{sk}\right)$$

On isole $U_{s(k+1)}$ de façon à mettre en évidence une relation de récurrence :

$$U_{s(k+1)}\left(\frac{\tau^2}{T_e^2} + \frac{3\tau}{T_e}\right) = U_k + U_{sk}\left(\frac{3\tau}{T_e} + \frac{2\tau^2}{T_e^2} - 1\right) + U_{s(k-1)}\left(-\frac{\tau^2}{T_e^2}\right)$$

On note $\alpha = \tau/T_e = \tau$ [illegible] z :

$$U_{s(k+1)} = \frac{1}{\alpha^2 + 3\alpha} \times U_k + \frac{2\alpha^2 + 3\alpha + 1}{\alpha^2 + 3\alpha} \times U_{sk} + \frac{-\alpha^2}{\alpha^2 + 3\alpha}U_{s(k-1)}$$

−1)

Nous pouvons calculer successivement les U_{sk} à l'aide de cette relation de récurrence, en initialisant $U_{s0} = U_0$ et $U_{s1} = U_1$.

Q35. Le spectre doit être affiché sur l'intervalle [0; 1,28 Hz] pour respecter le critère de Shannon.

Pb3 : CCINP 2025 PC – L'assistance gravitationnelle

I – Généralités

Q27. La sonde n'est soumise, dans le référentiel "jupiterocentrique" $\mathscr{R}_j$ considéré galiléen, qu'à la force gravitationnelle exercée par Jupiter qui s'écrit $\vec{F} = -\mathscr{G}mM_J\frac{\vec{JP}}{JP^3}$. C'est une force centrale, son moment en J est donc nul : $\mathscr{M}_J(\vec{F}) = \vec{JP}\wedge\vec{F} = 0$ car les vecteurs son colinéaires.

On applique le TMC à P : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\vec{L_J}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{M}_J(\vec{F}) = \mathbf{0}}$ donc le moment cinétique $\vec{L}_J$ est constant.

Si on note $\vec{u_z}$ la direction et $\vec{L}_J$, le mouvement est dans le plan orthogonal à $\vec{u_z}$ par définition du produit vectoriel ($\vec{L}_J = \vec{JM}\wedge m\,\vec{v}_J(P)$). En coordoonées polaires, $\vec{JM} = r\vec{u_r}$ et $\vec{v}_J(P) = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ donc $\vec{L}_J = mr^2\dot{\theta}\vec{u_z}$.

Comme $\vec{L}_J$ est constant, sa norme l'est aussi donc $\boxed{r^2\dot{\theta} = C = cste}$.

Q28. Par définition de l'énergie potentielle :

$$\mathrm{d}\mathscr{E}_p = -\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{JP} = +\mathscr{G}mM_J\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \Rightarrow \boxed{\mathscr{E}_p = -\frac{\mathscr{G}mM_J}{r} + cste}$$

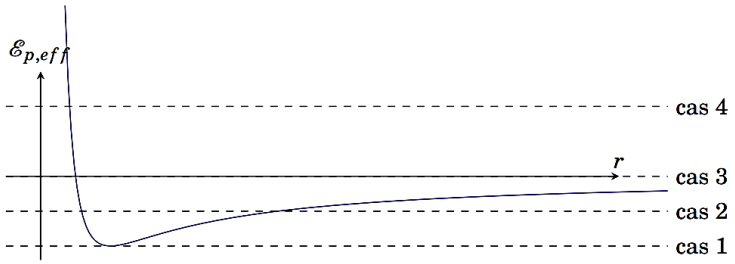
en prenant une énergie nulle à l'infini.

Q29. La seule force subie par la sonde est $\vec{F}$ qui est conservative. D'après le TEM, comme il n'y a **aucune force non conservative**, l'énergie mécanique est constante.

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - \frac{\mathscr{G}mM_J}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathscr{E}_{p,eff}(r)$$

en posant $\boxed{\mathscr{E}_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{\mathscr{G}mM_J}{r}}$.

Le tracé de $\mathscr{E}_{p,eff}(r)$ est le suivant :



Comme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0$, on a nécessairement $\mathscr{E}_m \geq \mathscr{E}_{p,eff}(r)$. on représente la valeur de $\mathscr{E}_m$ en pointillés.
Dans le cas 1, une seule valeur de r est possible, c'est une trajectoire **circulaire** (état lié).
Dans le cas 2, r oscille entre 2 valeurs finies, c'est une trajectoire **elliptique** (état lié).
Le cas 3 est le cas limite d'une trajectoire **parabolique** ($\mathscr{E}_m = 0$, état libre, ou de diffusion).
Dans le cas 4, r va de l'infini à une valeur minimale, c'est une trajectoire **hyperbolique** (état libre, ou de diffusion).

Q30. Pour que la sonde puisse se libérer et partir à l'infini, l'énergie minimale à lui communiquer est celle correspondant à la trajectoire parabolique, donc $\mathscr{E}_m = 0$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathscr{G}mM_J}{r} \geq 0 \Rightarrow \boxed{v \geq v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathscr{G}M_T}{r}}}$$

II - Sphère de Hill de Jupiter

Q31. On applique la seconde loi de NEWTON à Jupiter, dans le référentiel héliocentrique. La seule force est la force gravitationnelle exercée par le Soleil. La trajectoire est circulaire de rayon d, donc en projection sur l'axe radial, on a :

$$-M_J d\Omega^2 = -\mathscr{G}\frac{M_J M_S}{d^2} \Rightarrow \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_S}{d^3}} \text{ et } V_{J,h} = d\Omega = \sqrt{\frac{\mathscr{G}M_S}{d}}}$$

Application numérique : $V_{J,h} = 13\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$

Q32. Le référentiel $\mathscr{R}'$ est en **rotation** par rapport à $\mathscr{R}_h$, supposé galiléen. Il n'est donc **pas galiléen**.

Q33. Au bilan des forces, on tient compte des forces gravitationnelles et des "forces" d'inertie :

- Attraction due au Soleil : $\vec{F}_S = -\mathscr{G}\frac{mM_S}{(d-r)^2}\vec{u_x}'$

- Attraction due à Jupiter : $\vec{F}_J = +\mathcal{G}\frac{mM_J}{r^2}\vec{u_x}'$
- "Force" d'inertie d'entrainement : $\vec{F}_{ie} = +m\Omega^2(d-r)\vec{u_x}' = +\mathcal{G}\frac{mM_S(d-r)}{d^3}\vec{u_x}'$
- "Force" d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = 0$ car la sonde est immobile dans ce référentiel.

Q34. A l'équilibre, la somme des forces est nulle :

$$-\mathcal{G}\frac{mM_S}{(d-r)^2} + \mathcal{G}\frac{mM_J}{r^2} + \mathcal{G}\frac{mM_S(d-r)}{d^3} = 0$$

On simplifie par $m\mathcal{G}$ et on multiplie par $r^2d^3(d-r)^2$ pour obtenir :

$$-M_Sd^3r^2 + M_Jd^3(d-r)^2 + M_S(d-r)^3r^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{M_Jd^3(d-r)^2 = M_Sr^2\left(d^3-(d-r)^3\right)}}$$

Pour faire le DL, on divise d'abord par d^5 :

$$M_J\left(1-\frac{r}{d}\right)^2 = M_S\frac{r^2}{d^2}\left(1-\left(1-\frac{r}{d}\right)^3\right)$$

$$M_J\left(1-\frac{2r}{d}\right) = M_S\frac{r^2}{d^2}\left(1-\left(1-\frac{3r}{d}\right)\right)$$

Au premier ordre non nul, il ne reste que :

$$M_J \approx M_S\frac{r^2}{d^2}\frac{3r}{d} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{r = r_H = d\sqrt[3]{\frac{M_J}{3M_S}}}}$$

Application numérique : $r_H = 5{,}3.10^7$ km

III - Principe de l'assistance gravitationnelle

Q35. La seule force en présence est la force d'attraction gravitationnelle qui est conservative et dont l'énergie potentielle ne dépend que de la distance à J. On a donc d'après le Théorème de l'Énergie Mécanique :

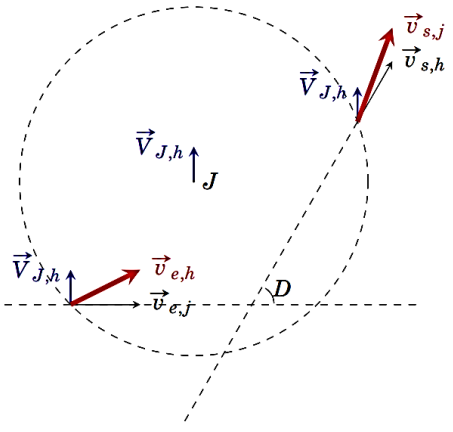
$$\mathcal{E}_{m,e} = \mathcal{E}_{m,s} \text{ avec } \mathcal{E}_{p,e} = \mathcal{E}_{p,s} = -\frac{\mathcal{G}mM_J}{r_H}$$

On en déduit que l'énergie cinétique est conservée également : $\mathcal{E}_{c,e} = \mathcal{E}_{c,s} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v_{e,j} = v_{s,j} = v_j}}$.

Q36. La sonde arrive de l'infini et repart à l'infini, elle est donc dans un état de diffusion, donc sa vitesse est par définition supérieure à v_ℓ.
Application numérique : $v_\ell = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_J}{r_H}} = 2{,}2\text{km}\cdot\text{s}^{-1} < v_j$

Q37. On utilise la loi de composition des vitesses dans le cadre d'un référentiel en translation par rapport à un autre avec la vitesse d'entrainement $\vec{V}_{J,h}$. On a donc $\boxed{\boldsymbol{\vec{v}_{e,h} = \vec{v}_{e,j} + \vec{V}_{J,h}}}$ et $\boxed{\boldsymbol{\vec{v}_{s,h} = \vec{v}_{s,j} + \vec{V}_{J,h}}}$.

Q38. Les normes des vitesses additionnnées sont les mêmes, mais l'angle diminue entre elles donc la somme augmente : la vitesse en sortie est plus grande qu'en entrée.
Dans le cas présent ($\vec{V}_{J,h} \perp \vec{v}_{e,j}$), l'effet sera maximal pour $D = 90°$, ainsi $\vec{V}_{J,h}$ et $\vec{v}_{s,h}$ sont colinéaires.



Q39. On exprime la norme de la somme des vecteurs (en projetant $\vec{v}_{s,j}$) :

$$\boxed{v_{e,h} = \sqrt{V_{J,h}^2 + v_{e,j}^2}}$$

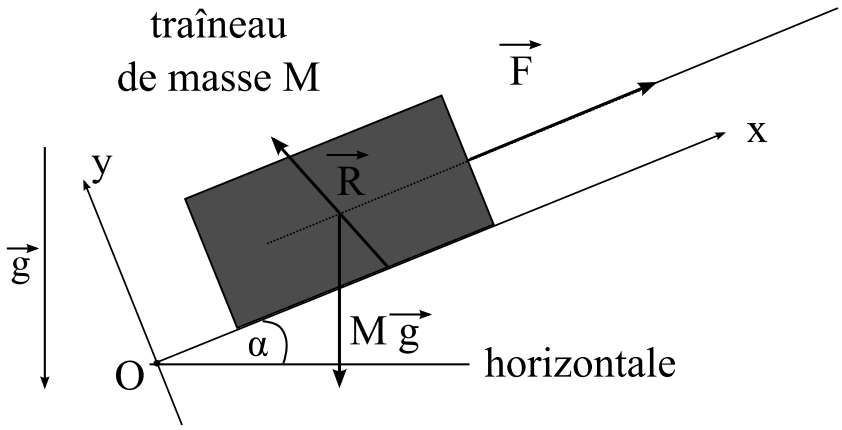
$$\vec{v}_{s,j} = v_{s,j}\cos D\vec{u_x} + v_{s,j}\sin D\vec{u_y} \Rightarrow \boxed{v_{s,h} = \sqrt{(v_{s,j}\cos D)^2 + (V_{J,h} + v_{s,j}\sin D)^2}}$$

Q40. *Application numérique :* $v_{e,h} = 16\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ et $v_{s,h} = 22\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ donc $\Delta v_h = 6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ et $\Delta \mathscr{E}_{c,h} = 81.10^9\,\mathrm{J}$
Le gain d'énergie vient du travail de la force gravitationnelle exercée par Jupiter.

Q41. L'assistance gravitationnelle est beaucoup plus efficace que les propulseurs.

Pb4 : Mines 2019 MP - Un traîneau sur la glace de la banquise

- 12 - La masse nulle permet d'obtenir des tensions aux extrémités de la corde de même norme et opposées (le théorème de la quantité de mouvement appliqué à un élément de longueur de corde de masse nulle assure que la somme des actions extérieures est nulle). Leur direction est suivant la corde car la corde est tendue par ces tensions.
- 13 - Soit le schéma pour le traîneau sur une pente inclinée suivant :



Bilan des actions mécaniques sur le traîneau :
La force de traction $\vec{F}$ exercée par la corde, le poids M$\vec{g}$ et la réaction du sol $\vec{R}$.
On a supposé ici les trois forces concourantes en G et la corde parallèle à la pente.
La projection du théorème de la quantité de mouvement donne :
$M\ddot{x} = F - Mg\sin\alpha + R_T$ sur Ox
et $M\ddot{y} = -Mg\cos\alpha + R_N = 0$ orthogonalement à la pente.

On a noté $\vec{R} = R_T\vec{e}_x + R_N\vec{e}_y$ la réaction de la pente sur le traîneau avec $R_T < 0$ et $R_N > 0$. Par les lois de Coulomb, la condition de glissement donne ici $R_T = -\mu_d R_N = -\mu_d Mg\cos\alpha$
Donc la première équation mène à $M\ddot{x} = F - Mg\sin\alpha - \mu_d Mg\cos\alpha$
Sur une surface horizontale, l'accélération du traîneau est alors $\ddot{x} = F/M - \mu_d g$.
On peut écrire sur un plan incliné $M\ddot{x} = F - \mu'_d Mg$ en posant **$\mu'_d = \mu_d\cos(\alpha) + \sin(\alpha)$**

- 14 – D'après la question précédente, $\ddot{x} = F/M - \mu_d g = (F_0 - \beta\dot{x})/M - \mu_d g$ Donc pour démarrer il faut que **$F_0 \geq F_{0min} = \mu_s.Mg$**.

A.N. : $F_{0min} = 8.10^{-2}.5.10^2.9{,}8 = 4.98 = 392 \approx 39.10^1$ N.
Soit une traction minimale de « 40 kg » en équivalent masse très aisé pour un attelage de chiens de traîneaux (à répartir entre les différents chiens sans compter la poussée du musher).

- 15 - Le traîneau est en régime stationnaire ($\ddot{x} = 0$) lorsque la force de traction compense juste la réaction tangentielle : $F_m = F_0 - \beta v_0 = \mu_d Mg$ qui donne :

$F_0 = \beta v_0 + \mu_d Mg$.

Pour obtenir β, traitons le mouvement : $M\ddot{x} = F_0 - \beta v - \mu_d Mg = M\dot{v}$

Cela conduit à l'équation différentielle $\dot{v} + \frac{\beta}{M}v = \frac{F_0}{M} - \mu_d g$

Qui donne la solution générale $v = \frac{F_0}{\beta} - \frac{\mu_d Mg}{\beta} + A\exp(-\frac{t}{\tau})$ avec $\tau = M/\beta$.

En partant de l'immobilité, on obtient $v(0) = 0 = \frac{F_0}{\beta} - \frac{\mu_d Mg}{\beta} + A$ soit $A = -\frac{F_0}{\beta} + \frac{\mu_d Mg}{\beta}$ et donc :

$$v(t) = \left(\frac{F_0}{\beta} - \frac{\mu_d Mg}{\beta}\right)\left(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right).$$

On reconnaît alors la vitesse limite $v_0 = \frac{F_0}{\beta} - \frac{\mu_d Mg}{\beta}$ déjà obtenue précédemment.

Le temps de montée t_1 à 95% est défini par : $v(t_1) = v_0\left(1 - \exp(-\frac{t_1}{\tau})\right) = 0{,}95 v_0$

On développe en $v_0 \exp(-\frac{t_1}{\tau}) = v_0(1 - 0{,}95) = \frac{v_0}{20}$. On déduit $\frac{t_1}{\tau} = \ln(20)$.

Comme $\tau = M/\beta$, on obtient $\underline{\beta = M\frac{\ln(20)}{t_1} = -M\frac{(1-0{,}95)}{t_1}}$

A.N. : $\beta = 500.\ln(20)/5 = 300 \approx 3.10^2$ N.s.m^{-1}.

$F_0 = 300.3+5{,}0.10^{-2}.500.9{,}8 = 900 + 25.9{,}8 = 900+245 = 1145 \approx \underline{1{,}1.10^3\ \text{N}}$.

C'est une traction initiale de près de « 120 kg » en équivalent masse tout à fait envisageable pour un attelage de chiens de traîneaux (12 kg par chien pour un attelage de 10 chiens par exemple).

- 16 - On utilise les coordonnées polaires sur ce mouvement circulaire.
  On projette le théorème de la quantité de mouvement appliqué au traîneau :
  $-MR\omega^2 = F\sin\theta$ sur la direction radiale (la force de traction change de notation au passage dans l'énoncé)
  et $MR\dot{\omega} = F\cos\theta - \mu_d Mg$ sur la direction tangentielle (la force tangentielle n'a pas changé car R_N n'a pas changé).
  Le mouvement étant uniforme $MR\dot{\omega} = 0 = F\cos\theta - \mu_d Mg$.
  On en déduit donc le système :

$$F\cos\theta = \mu_d Mg$$
$$F\sin\theta = -M\frac{v^2}{R}.$$

  Comme $v = v_0$, on obtient par le rapport $\tan(\theta) = v_0^2/\mu_d g$ et par la somme des carrés $F^2 = (\mu_d Mg)^2 + (M\frac{v_0^2}{R})^2$. Ceci donne finalement :

$$\theta = arctan(\frac{v_0^2}{\mu_d gR}) \text{ et}$$
$$\underline{F = T = M\sqrt{\mu_d^2 g^2 + \frac{v_0^4}{R^2}}}$$

- **17 –** On applique le théorème de l'énergie cinétique au traîneau entre la vitesse v_0 et l'arrêt du traîneau pour une distance parcourue L :

  $\Delta Ec = -\frac{1}{2}Mv_0^2 = W_{frottements} = -\mu_d MgL$

  On en déduit $L = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}$