

Feuille d'exercices n°12

Exercice 1 (***)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexes, positives vérifiant

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$$

Montrer que le produit fg est convexe.

Corrigé : Supposons dans un premier temps f et g deux fois dérivables. Par dérivation, on a

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

Comme les fonctions f et g ont même variation, le produit $f'g'$ est positif et tous les autres termes intervenant dans $(fg)''$ sont positifs d'où la convexité de fg . Vérifions que le résultat a lieu sans l'hypothèse de dérivabilité. Soit $(x, y) \in I^2$. On pose

$$\forall \lambda \in [0; 1] \quad \Delta(\lambda) = \lambda f g(x) + (1 - \lambda) f g(y) - f g(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

En faisant le produit des inégalités de convexité pour f et g qui sont positives, on obtient pour $\lambda \in [0; 1]$

$$\Delta(\lambda) \geq \lambda f g(x) + (1 - \lambda) f g(y) - (\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) (\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y))$$

On développe, on factorise et on obtient

$$\Delta(\lambda) \geq \lambda(1 - \lambda) (f g(x) + f g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x))$$

Enfin, en observant l'égalité

$$(f g(x) + f g(y) - f(x)g(y) - f(y)g(x)) = (f(x) - f(y)) (g(x) - g(y))$$

On obtient

$$\Delta(\lambda) \geq \lambda(1 - \lambda) (f(x) - f(y)) (g(x) - g(y))$$

Comme les fonctions f et g ont même variations, le produit $(f(x) - f(y)) (g(x) - g(y))$ est positif et on obtient

$$\forall \lambda \in [0; 1] \quad \Delta(\lambda) \geq 0$$

Autrement dit

Le produit fg est convexe.

Exercice 2 (***)

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Pour X variable aléatoire, on définit l'entropie de X notée $H(X)$ par

$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \ln(\mathbb{P}(X = x))$$

avec pour convention $0 \ln(0) = 0$. Intuitivement, l'entropie correspond à la quantité d'information délivrée par la variable aléatoire X ou encore à l'incertitude (ou désordre) liée aux valeurs prises par X .

1. Montrer

$$0 \leq H(X) \leq \ln(\text{Card } X(\Omega))$$

2. Montrer $H(X) = 0 \iff \exists a \in X(\Omega) \mid \mathbb{P}(X = a) = 1$

3. Montrer $H(X) = \ln(\text{Card } X(\Omega)) \iff X \sim \mathcal{U}_{X(\Omega)}$

Corrigé : 1. La minoration est immédiate. Notons $n = \text{Card } X(\Omega)$. Posons $f(u) = -u \ln u$ pour $u > 0$. On a f dérivable et $f'(u) = -(\ln(u) + 1)$ pour $u > 0$ d'où f' décroissante et par conséquent f concave. En considérant la tangente en 1 et avec la convention $0 \ln(0) = 0$, on obtient

$$\forall u \geq 0 \quad -u \ln(u) \leq 1 - u$$

On l'applique à $n\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$ et il vient

$$\forall x \in X(\Omega) \quad -n\mathbb{P}(X = x) (\ln(n) + \ln(\mathbb{P}(X = x))) \leq 1 - n\mathbb{P}(X = x)$$

$$\text{D'où} \quad -n \ln(n) \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)}_{=1} + nH(X) \leq \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} 1}_{=n} - \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(X = x)}_{=n} = n - n = 0$$

ce qui prouve $H(X) \leq \ln n$ autrement dit

$$\boxed{0 \leq H(X) \leq \ln(\text{Card } X(\Omega))}$$

2. Supposons qu'il existe $a \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = a) = 1$. Par conséquent

$$\forall x \in X(\Omega) \setminus \{a\} \quad 0 \leq \mathbb{P}(X = x) \leq \mathbb{P}(X \neq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = a) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi} \quad H(X) &= - \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) \times \ln(\mathbb{P}(X = x)) \\ &= -\mathbb{P}(X = a) \underbrace{\ln \mathbb{P}(X = a)}_{=0} - \sum_{x \in X(\Omega) \setminus \{a\}} \underbrace{\mathbb{P}(X = x) \ln(\mathbb{P}(X = x))}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons $H(X) = 0$. On a

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{-\mathbb{P}(X = x) \times \ln(\mathbb{P}(X = x))}_{\geq 0}$$

Il s'agit d'une somme de termes positifs donc $H(X)$ est nulle si et seulement chaque terme de la somme est nul et par suite

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x) > 0 \implies \mathbb{P}(X = x) = 1$$

Or la famille $(\{X = x\})_{x \in X(\Omega)}$ forme un système complet d'événements donc $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$

donc il existe nécessairement $a \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = a) > 0$ et par conséquent $\mathbb{P}(X = a) = 1$. On a donc montré

$$\boxed{H(X) = 0 \iff \exists a \in X(\Omega) \mid \mathbb{P}(X = a) = 1}$$

3. Notons $n = \text{Card } X(\Omega)$. Supposons $X \sim \mathcal{U}_{X(\Omega)}$. Il vient

$$H(X) = - \sum_{x \in X(\Omega)} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n)$$

Réciproquement, supposons $H(X) = \ln(n)$. En considérant que l'inégalité de la question 1 est une égalité, on obtient

$$\sum_{x \in X(\Omega)} [-n\mathbb{P}(X = x) \ln(n\mathbb{P}(X = x)) - (1 - n\mathbb{P}(X = x))] = 0$$

et d'après l'inégalité $-u \ln(u) \leq 1 - u$ pour $u \geq 0$, les termes de la somme sont négatifs d'où

$$\forall x \in X(\Omega) \quad -n\mathbb{P}(X=x) \ln(n\mathbb{P}(X=x)) = 1 - n\mathbb{P}(X=x)$$

Or l'inégalité $-u \ln(u) \leq 1 - u$ est une égalité pour $u \geq 0$ si et seulement si $u = 1$ (faire une étude de fonctions) d'où

$$\forall x \in X(\Omega) \quad n\mathbb{P}(X=x) = 1$$

Ainsi

$$\boxed{H(X) = \ln(\text{Card } X(\Omega)) \iff X \sim \mathcal{U}_{X(\Omega)}}$$

Exercice 3 (***)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg P \geq 1$. L'ensemble des racines de P' est contenu dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Corrigé : On écrit $P = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$ écriture scindée dans $\mathbb{C}[X]$ avec les λ_i racines de P . On a

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - \lambda_i}$$

Soit α une racine de P' non racine de P (sinon, c'est trivial). On obtient, en multipliant par le conjugué puis en conjuguant l'expression finale

$$P'(\alpha) = 0 \iff \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{\alpha - \lambda_i} = 0 \iff \sum_{i=1}^r \frac{m_i(\alpha - \lambda_i)}{|\alpha - \lambda_i|^2} = 0$$

On pose

$$M = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{|\alpha - \lambda_i|^2} \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \mu_i = \frac{1}{M} \frac{m_i}{|\alpha - \lambda_i|^2}$$

On a

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \mu_i \lambda_i \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1; r \rrbracket \quad \mu_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \mu_i = 1$$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines de } P' \text{ est contenu dans l'enveloppe convexe des racines de } P.}$$

Remarque : Il s'agit du théorème de *Gauss-Lucas*.

Exercice 4 (***)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev. Pour $X \subset E$, on définit l'*enveloppe convexe* de X par

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{K \text{ convexe } \supset X} K$$

1. Justifier qu'il s'agit du plus petit convexe contenant X .
2. Montrer que l'enveloppe convexe de X est l'ensemble des combinaisons convexes de X , *i.e.*

$$\text{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, n \geq 1, (x_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in X^n, (\alpha_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Corrigé : 1. Comme une intersection de convexes est un convexe, l'ensemble $\text{Conv}(X)$ est un convexe et il est, par définition, inclus dans tout convexe de E contenant X d'où

$$\boxed{\text{L'enveloppe convexe de } X \text{ est le plus petit convexe contenant } X.}$$

2. Soient x, y des combinaisons convexes de X , c'est-à-dire

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^m \mu_j y_j$$

avec n, m entiers non nuls, les $\alpha_i, \mu_j \geq 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^m \mu_j = 1$ et les x_i, y_j dans X . Pour $\lambda \in [0; 1]$, on a

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m (1 - \lambda) \mu_j y_j$$

Les scalaires $\lambda \alpha_i, (1 - \lambda) \mu_j$ sont positifs et $\sum_{i=1}^n \lambda \alpha_i + \sum_{j=1}^m (1 - \lambda) \mu_j = 1$ ce qui prouve que l'ensemble des combinaisons convexes de X est un convexe et qui contient clairement X . Ainsi, l'enveloppe convexe est contenue dans l'ensemble des combinaisons convexes de X . Puis, comme l'enveloppe convexe de X est convexe, elle est égale à l'ensemble des combinaisons convexes de ses vecteurs. Ainsi, l'enveloppe convexe contient l'ensemble des combinaisons convexes de X . On conclut

$$\text{Conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, n \geq 1, (x_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in X^n, (\alpha_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

Exercice 5 (***)

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable. Montrer

$$0 \leq \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{f'(1) - f'(0)}{8}$$

Corrigé : Par convexité, le graphe de f est sous la corde entre 0 et 1 d'où

$$\forall t \in [0; 1] \quad f(t) \leq f(0) + t(f(1) - f(0))$$

Et après intégration

$$\int_0^1 f(t) dt \leq \int_0^1 (f(0) + t(f(1) - f(0))) dt = \frac{f(1) + f(0)}{2}$$

Toujours par convexité, le graphe de f se situant au dessus des tangentes prises en 0 et 1, on a

$$\forall t \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \quad f(t) \geq f(0) + f'(0)t \quad \text{et} \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \quad f(t) \geq f(1) + f'(1)(t - 1)$$

Ainsi, après intégration

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} (f(0) + f'(0)t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (f(1) + f'(1)(t - 1)) dt \\ &\geq \frac{f(0) + f(1)}{2} + \frac{f'(0) - f'(1)}{8} \end{aligned}$$

On conclut

$$0 \leq \frac{f(0) + f(1)}{2} - \int_0^1 f(t) dt \leq \frac{f'(1) - f'(0)}{8}$$

Exercice 6 (****)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Montrer que $g(x) = f(x) - xf'(x)$ admet une limite (finie ou infinie) pour $x \rightarrow +\infty$.

2. On suppose que g admet une limite finie p pour $x \rightarrow +\infty$. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie m pour $x \rightarrow +\infty$.

3. Montrer alors
$$f(x) - mx - p \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Corrigé : 1. En supposant f deux fois dérivable, on trouve $g'(x) = -xf''(x) \leq 0$ pour $x \geq 0$. Montrons ce résultat avec les hypothèses du sujet. Soit $y > x \geq 0$. On a

$$g(y) - g(x) = \underbrace{f(y) + (x - y)f'(y) - f(x)}_{\leq 0} + x \underbrace{[f'(x) - f'(y)]}_{\leq 0}$$

La première inégalité résulte de la position graphe/tangente en y et la deuxième vient par croissance de f' .

On en déduit
$$\forall y \geq x \geq 0 \quad g(y) - g(x) \leq 0$$

Ainsi, la fonction g décroît sur $[0; +\infty[$ et d'après le théorème de limite monotone

La fonction g admet une limite finie ou infinie en $+\infty$.

2. Posons
$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - p}{x} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

Par dérivation, on a

$$\forall x > 0 \quad \varphi'(x) - \frac{1}{x^2} [f(x) - xf'(x) - p] = -\frac{g(x) - p}{x^2}$$

et
$$\forall x > 0 \quad \psi'(x) = -\frac{1}{x^2} [f(x) - xf'(x) - f(0)] = -\frac{g(x) - f(0)}{x^2}$$

La fonction g étant décroissante, on a $p \leq g(x) \leq g(0)$ pour tout $x \geq 0$ on en déduit

$$\forall x > 0 \quad \varphi'(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad \psi'(x) \geq 0$$

et on a également
$$\forall x > 0 \quad \psi(x) \leq \varphi(x)$$

Ainsi
$$\forall x \geq 1 \quad \psi(1) \leq \psi(x) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1)$$

Par limite monotone, les fonctions φ et ψ admettent donc des limites finies en $+\infty$. Enfin, on a

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) - \psi(x) = \frac{f(0) - p}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que les fonctions φ et ψ admettent une même limite finie m en $+\infty$. Ainsi, on obtient pour $x > 0$

$$\frac{f(x)}{x} = \varphi(x) + \frac{p}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} m + o(1) \quad \text{et} \quad f'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{g(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} m + o(1) + \frac{p + o(1)}{x}$$

On conclut

Les fonctions $\frac{f(x)}{x}$ et $f'(x)$ admettent une même limite finie m pour $x \rightarrow +\infty$.

Remarque : On a mis en œuvre une version continue du résultat des suites adjacentes.

Variantes : (a) Avec des hypothèses un peu renforcées, on peut procéder différemment, sans l'introduction des fonctions φ et ψ qui n'est pas complètement évidente. Supposons $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On pose
$$\forall x > 0 \quad h(x) = \frac{f(x)}{x}$$

La fonction h est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et par dérivation

$$\forall x > 0 \quad h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Par hypothèse, il existe $M \geq 0$ et tel que $|g(x)| \leq M$ pour $x \geq 1$. Par suite

$$\forall x \geq 1 \quad |h(x) - h(1)| = \left| \int_1^x h'(t) dt \right| \leq \int_1^x \frac{M dt}{t^2} \leq M$$

Par conséquent, la fonction h n'admet pas de limite infinie en $+\infty$. Or, on a

$$g(x) = O(1) \quad \xrightarrow{+\infty} \quad h(x) - f'(x) = \frac{g(x)}{x} = o(1)$$

et comme f' croît par convexité de f , celle-ci admet une limite finie ou infinie en $+\infty$ d'après le théorème de limite monotone et de même pour h d'après l'égalité précédente. On retrouve alors le résultat attendu.

(b) On peut conserver l'idée du contrôle de h avec seulement l'hypothèse de dérivabilité de f en suivant un démarche discrétisée. Pour $x \geq 1$, on décompose

$$h(x) - h(1) = \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor - 1} [h(k+1) - h(k)] + h(x) - h(\lfloor x \rfloor)$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall k \geq 1 \quad |h(k+1) - h(k)| \leq \frac{M}{k^2} \quad \text{et} \quad \forall x \geq 1 \quad |h(x) - h(\lfloor x \rfloor)| \leq \frac{M}{\lfloor x \rfloor^2}$$

Ainsi $\forall x \geq 1 \quad |h(x) - h(1)| \leq \sum_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{M}{k^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} O(1)$

On conclut comme précédemment.

3. La fonction φ décroît et $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} m$ d'où $\varphi(x) \geq m$ pour tout $x > 0$ et par conséquent

$$\forall x > 0 \quad f(x) - mx \geq p$$

Par ailleurs, comme f' croît et tend vers m en $+\infty$, on obtient

$$\forall x > 0 \quad p \leq f(x) - mx \leq f(x) - xf'(x)$$

Par encadrement

$$\boxed{f(x) - mx - p \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

Exercice 7 (****)

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension n et $X \subset E$. Montrer que tout élément de $\text{Conv}(X)$ peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ éléments de X .

Corrigé : Soit $x \in \text{Conv}(X)$. On a $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i$ avec les $\alpha_i \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$ et les x_i dans X . On suppose $p > n+1$. Par suite, la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_p - x_1)$ est liée. Il existe des réels β_i non tous nuls tels que $\sum_{i=2}^p \beta_i (x_i - x_1) = 0$. On pose $\beta_1 = -\sum_{i=2}^p \beta_i$. Ainsi, on a $\sum_{i=1}^p \beta_i x_i = 0$ et par suite

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad x = \sum_{i=1}^p (\alpha_i + t\beta_i)x_i$$

Comme les β_i ne sont pas tous nuls et de somme nulle, l'un d'entre eux est strictement négatif. On pose

$$\tau = \min \left\{ -\frac{\alpha_i}{\beta_i}, \beta_i < 0 \right\} \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \lambda_i = \alpha_i + \tau\beta_i$$

Si $\beta_i \geq 0$, alors $\lambda_i \geq 0$ comme somme de termes positifs. Si $\beta_i < 0$ alors $-\frac{\alpha_i}{\beta_i} \geq \tau \iff \lambda_i \geq 0$. Ainsi, les λ_i sont positifs, de somme égale à 1 et il existe un i_0 tel que λ_{i_0} est nul (un indice qui réalise le minimum dans la définition de τ). Il vient

$$x = \sum_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket \setminus \{i_0\}} \lambda_i x_i$$

On est donc passé pour l'écriture de x d'une combinaison convexe de p éléments à une combinaison convexe de $p - 1$ éléments. En itérant, ce procédé, on se ramène à $n + 1$ éléments. On conclut

Tout élément de $\text{Conv}(X)$ peut s'écrire comme combinaison convexe de $n + 1$ éléments de X .

Remarque : Il s'agit du *théorème de Carathéodory*.