

Feuille d'exercices n°11

Exercice 1 (**)

Soit $f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ affine. On suppose

$$f(1) = g(1) \quad \text{et} \quad \forall x > 0 \quad g(x) \geq f(x)$$

Montrer $f = g$.

Exercice 2 (**)

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *convexe* si pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0; 1]$, on a

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pour x, y dans $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_{x,y}(t) = f(x + t(y - x))$$

Montrer que la fonction f est convexe si et seulement si, pour tous x, y dans $\mathbb{R}^n$, la fonction $\varphi_{x,y}$ est convexe.

Exercice 3 (**)

Soit $M_1 \dots M_n$ (avec $n > 2$) un polygone inscrit dans le cercle unité avec M_1 de coordonnées $(1, 0)$. Montrer que ce polygone est de périmètre maximal s'il est régulier.

Exercice 4 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]0; +\infty[$. Montrer

$$\ln \circ f \text{ convexe} \iff \forall \alpha > 0 \quad f^\alpha \text{ convexe}$$

Exercice 5 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est continue.

Exercice 6 (***)

Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels positifs.

1. Établir

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2. Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Exercice 7 (****)

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 8 (Hölder, Minkowski ****)

Soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, I un intervalle et f, g continues sur I , positives.

1. Soient $a, b \geq 0$. Montrer

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2. On suppose f^p et g^q intégrables sur I . Montrer que fg est intégrable sur I et

$$\int_I fg \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} \left(\int_I g^q \right)^{1/q}$$

3. On suppose f^p et g^p intégrables sur I . Montrer que $(f + g)^p$ est intégrable sur I et

$$\left(\int_I (f + g)^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_I f^p \right)^{1/p} + \left(\int_I g^p \right)^{1/p}$$