

Corrigé du devoir en temps libre n°2

Problème I

1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}$

avec $X = \mathbb{R}_+$ et $I =]0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ puis $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité de φ sur l'intervalle I . Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est définie, continue sur } [0; +\infty[.}$$

On pose $X' =]0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^2$ sous l'intégrale.

- Pour $x \in X'$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et intégrable d'après la domination précédente.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^2(X', \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X' \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-xt} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = (1 - \cos(t)) e^{-xt}$$

- Pour $x \in X'$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{o(t)}{t} e^{-xt} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

d'où l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sur I .

- Pour $x \in X'$, on a $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On procède localement pour conserver le terme avec l'exponentielle. Pour $a > 0$, on a

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times I \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 2e^{-at}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ et φ intégrable sur I puisque $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a}$. Ainsi, on a F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$ d'où

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^2(]0; +\infty[, \mathbb{R})}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} -\frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-xt} dt$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange et l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |1 - \cos(t)| \leq \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad |1 - \cos(t)| \leq t$$

Comme $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur I (faussement impropre en 0 et critère de comparaison et Riemann en $+\infty$), on a

$$\forall x > 0 \quad 0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{2} dt = \frac{1}{2x} \quad \text{et} \quad 0 \leq F'(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

Ainsi, par encadrement, on conclut

$$\boxed{F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad F'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x > 0 \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-xt} dt$$

Par linéarité car convergence des intégrales, on trouve pour $x > 0$

$$F''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - \int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{-(x+i)t} dt = \frac{1}{x} - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x+i} \right)$$

D'où

$$\boxed{\forall x > 0 \quad F''(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}}$$

Par intégration, il vient

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Or} \quad \forall x > 0 \quad F'(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right) + \alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha = 0$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x > 0 \quad F'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)}$$

$$4. \text{ On pose} \quad \forall x > 0 \quad G(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}$$

La fonction G est dérivable sur $]0; +\infty[$ et par dérivation, on trouve

$$\forall x > 0 \quad G'(x) = F'(x)$$

$$\text{d'où} \quad \forall x > 0 \quad F(x) = G(x) + \beta \quad \text{avec} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Puis} \quad \forall x > 0 \quad G(x) &= -\frac{1}{2} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + o \left(\frac{1}{x} \right) \right) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\beta = 0$. Enfin, par continuité de F en 0, on a

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) - \frac{x}{2} \ln(x^2 + 1) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Et on conclut} \quad \boxed{\begin{cases} \forall x > 0 & F(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} \\ F(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

Problème II

1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\ln(1 + x \cos(t))}{\cos(t)}$

avec $X = [-1; 1]$ et $I =]0; \frac{\pi}{2}[$. On vérifie :

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ avec notamment un prolongement par continuité en $\frac{\pi}{2}$ puisque

$$\frac{\ln(1 + x \cos(t))}{\cos(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \frac{\pi}{2}]{} x$$

- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : En distinguant selon le signe de x et $\cos(t)$, on obtient

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = -\frac{\ln(1 - \cos(t))}{\cos(t)}$$

On a $\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow \frac{\pi}{2}]{} 1$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

d'où son intégrabilité sur I . On conclut

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^0([-1; 1], \mathbb{R})}$$

2. Soit $X' =]-1; 1[$. On vérifie :

- Pour $x \in X'$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$, intégrable sur I d'après la domination précédente.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X', \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X' \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{1 + x \cos(t)}$$

- Pour $x \in X'$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.
- Domination : Soit $a \in]0; 1[$. On a

$$\forall (x, t) \in [-a; 1] \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t) \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \frac{1}{1 - a}$$

et ψ clairement continue par morceaux et intégrable sur I . Ainsi, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a; 1]$ pour tout $a \in]0; 1[$ et par conséquent

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(]-1; 1], \mathbb{R})}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, on trouve

$$\forall x \in]-1; 1[\quad F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + x \cos(t)}$$

On effectue le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Soit $\varphi :]0; 1[\rightarrow]0; \frac{\pi}{2}[$, $u \mapsto 2 \operatorname{Arctan}(u)$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement croissante. On obtient par convergence et donc égalité des intégrales concernées

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + x \cos(t)} = \int_0^1 \frac{2 du}{1 + x + (1 - x)u^2}$$

Puis
$$\int_0^1 \frac{2 \, du}{1+x+(1-x)u^2} = \frac{2}{1-x} \left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \operatorname{Arctan} \left(u \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right]_0^1$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$$

On pose
$$\forall x \in [-1; 1] \quad G(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\operatorname{Arccos}(x)^2}{2}$$

La fonction G est dérivable sur $] -1; 1[$ comme composée de telles fonctions et par dérivation, il vient

$$\forall x \in] -1; 1[\quad G'(x) = \frac{\operatorname{Arccos}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Toujours par dérivation, on trouve

$$\frac{d}{dx} \left[\operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) \right] = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

D'où
$$\forall x \in] -1; 1[\quad \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Arccos}(x) + C^e$$

et la constante d'intégration est nulle en examinant $x = 0$. On a donc

$$\forall x \in] -1; 1[\quad F(x) = G'(x) \quad \text{et} \quad F(0) = G(0)$$

ce qui prouve que F et G coïncident sur $] -1; 1[$. Enfin, par continuité de F sur $[-1; 1]$, on conclut

$\forall x \in [-1; 1] \quad F(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\operatorname{Arccos}(x)^2}{2}$
