

Devoir surveillé n°1 - 3h

Le but de ce sujet est de calculer, pour p entier, l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)^{2p+1}}{t^2} dt$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

I Calcul d'une intégrale

Dans ce qui suit, on a $x \in]0; 1[$ fixé.

1 . Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi; \pi[$, la fonction

$$f: \begin{cases}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} \end{cases}$$

est définie et intégrable sur $]0; +\infty[$.

On pose

$$r: \begin{cases}]-\pi; \pi[\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} dt \end{cases}$$

2 . Montrer que la fonction r est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi; \pi[$ et que

$$\forall \theta \in]-\pi; \pi[\quad r'(\theta) = -ie^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1 + te^{i\theta})^2} dt$$

Indication : Soit $\beta \in]0; \pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta; \beta]$ et $t > 0$, on a

$$|1 + te^{i\theta}|^2 \geq |1 + te^{i\beta}|^2 = (t + \cos(\beta))^2 + \sin(\beta)^2$$

On pose

$$g: \begin{cases}]-\pi; \pi[\longrightarrow \mathbb{C} \\ \theta \longmapsto e^{ix\theta} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + te^{i\theta}} dt \end{cases}$$

3 . Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi; \pi[$ et que, pour tout $\theta \in]-\pi; \pi[$, on a

$$g'(\theta) = ie^{ix\theta} \int_0^{+\infty} h'(t) dt$$

avec

$$h: \begin{cases}]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \frac{t^x}{1 + te^{i\theta}} \end{cases}$$

Calculer

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t)$$

En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi; \pi[$.

4 . Montrer que pour tout $\theta \in]0; \pi[$

$$g(\theta) \sin(x\theta) = \frac{1}{2i} (g(-\theta)e^{ix\theta} - g(\theta)e^{-ix\theta}) = \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2 + 2t \cos(\theta) + 1} dt$$

5. En déduire $\forall \theta \in]0; \pi[\quad g(\theta) \sin(\theta x) = \int_{\cotan(\theta)}^{+\infty} \frac{(u \sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2} du$

où $\cotan(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$.

6 . Montrer en utilisant le théorème de convergence dominée

$$g(\theta) \sin(x\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi^-} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2}$$

7. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$

II Une expression utile de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément fixé de $]0; 1[$.

8. Montrer $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t} \right) dt$

9. Montrer $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$

10. Établir l'identité $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$

11. En déduire $\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2 - x^2}$

12. En déduire $\forall y \in]0; \pi[\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y \sin(y)}{y^2 - n^2 \pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}$

III Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 . Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)^{2p+1}}{t^2} dt$ converge et qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)^{2p+1}}{t^2} dt = (2p+1) \int_0^{+\infty} \cos(t)^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

14 . Montrer que pour tout n entier non nul, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} \cos(t)^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2p} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} dt$$

15. En déduire $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \cos(t)^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t \sin(t)}{t^2 - n^2 \pi^2} dt$

16. En déduire
$$\int_0^{+\infty} \cos(t)^{2p} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2p} dt$$

Dans le cas $p = 0$, cette intégrale est communément appelée *intégrale de Dirichlet*.

17. Montrer
$$\cos(t)^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right)$$

Indication : On pourra développer $\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2p}$.

18. En déduire
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)^{2p+1}}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}$$

IV Calcul de $\mathbb{E}(|S_n|)$

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, un entier $N \geq 2$ et $X_1, \dots, X_N$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ pour $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$.

19. Soit $n \in \llbracket 1; N \rrbracket$. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20. Montrer
$$\mathbb{E}(\cos(S+T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\mathbb{E}(\cos(T))$$

21. En déduire que pour t réel, on a

$$\forall n \in \llbracket 1; N \rrbracket \quad \mathbb{E}(\cos(tS_n)) = \cos(t)^n$$

22. Soient a, b réels tels que $a \neq 0$ et $|b| \leq |a|$. Montrer

$$|a+b| = |a| + \text{signe}(a)b$$

où $\text{signe}(x) = x/|x|$ pour x réel non nul. En déduire que pour tout n entier non nul tel que $2n \leq N$, on a

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{E}(|S_{2n-1}|)$$

23. Montrer
$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} |s|$$

24. En déduire
$$\forall n \in \llbracket 1; N \rrbracket \quad \mathbb{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)^n}{t^2} dt$$

25. Conclure en montrant pour n entier non nul tel que $2n \leq N$

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{E}(|S_{2n-1}|) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}$$