DM02 : Mécanique (Temps indicatif 1h30 (+1h30))

Remarques par question

Exercice 1 :

— Q1 : La sujet indique que l'on néglige la force d'inertie d'entrainement, cela revient à approcher le poids à la force gravitationnelle exercée par la Terre à sa surface. Le but de cette question est de vérifier la validité de cette approximation. Il faut donc distinguer la verticale locale selon $\vec{e}_z$ du vecteur radial $\vec{e}_\rho = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ correspondant à un rayon terrestre.

— Q2 : Quelques élèves ont oublié la tension du fil ! Ne pas oublier les actions de liaison.

— Q4 : Un mouvement horizontal se fait à $z = cste$. Il faut donc justifier que $z = z_0 + o(\alpha)$ à l'ordre 1 en α.

— Q9 : Le but de l'exercice est d'étudier les variations du plan d'oscillation sur des durées de l'ordre de la période associée à $\tilde{\Omega}$. Il ne faut donc pas approcher $\exp(-i\tilde{\Omega}t)$ à 1 !

Exercice 2 :

— Q2 et Q3 : Les équivalents de ressorts en série ou en parallèle sont à savoir redémontrer, c'est une question classique.

— Q5 : Ne pas confondre une relation de proportionnalité $y = ax$ et une relation affine $y = ax + b$!

— Q11 : Quand la formule est donnée dans le sujet, il faut détailler son obtention notant le lien entre $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}$.

— Q13 : Des arnaques dans l'expression du gradient ! Ici $E^2 = f(x, z)$, donc

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(E^2) = \frac{\partial E^2}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E^2}{\partial z}\vec{e}_z$$

Exercice 1: Pendule de Foucault ***(ENS PC 2022)***

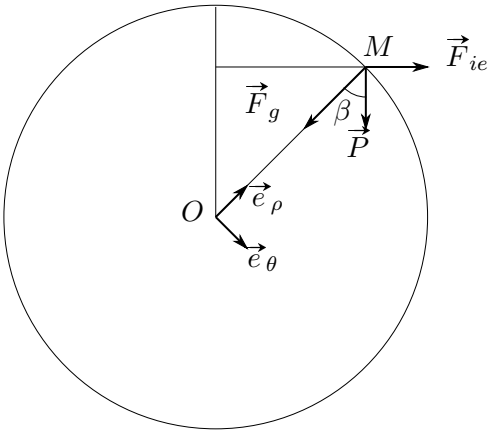
1.1 Mouvement du pendule sans effet de la force d'inertie de Coriolis

1. On rappelle que le poids est la somme de la force de gravitation exercée par la Terre sur le point M et de la force d'inertie d'entrainement :

$$\vec{P}(M) = \underbrace{-\frac{GM_T m}{{R_T}^2}\vec{e}_\rho}_{\vec{F}_g} + \underbrace{m\Omega^2\overrightarrow{HM}}_{\vec{F}_{ie}} \quad \text{avec} \quad \vec{e}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

On fait attention au fait que $\vec{e}_z$ est selon la verticale locale, qui n'est pas en toute rigueur confondue avec $\vec{e}_\rho$. Nous allons donc justifer le fait que sur le schéma du sujet, ces deux vecteurs sont confondus.
On définit le poids comme $\vec{P}(M) = -mg\vec{e}_z$.
Évaluons le rapport des deux termes en ordre de grandeur :

$$\frac{||\vec{F}_{ie}||}{||\vec{F}_g||} = \frac{\Omega^2 {R_T}^3}{GM_t} \simeq 3 \times 10^{-3} \ll 1 \quad \text{ainsi} \quad ||\overrightarrow{F_{ie}}|| \ll ||\vec{F}_g||.$$



Justifions maintenant que $\vec{P}$ a comme direction $\vec{e}_z \approx \vec{e}_\rho$. On note β l'angle formé entre $\vec{P}$ et $-\vec{e}_\rho$. On a

$$\tan\beta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{e}_\theta}{\vec{P}\cdot(-\vec{e}_\rho)} = \frac{\vec{F}_{ie}\cdot\vec{e}_\theta}{-\vec{F}_g\cdot\vec{e}_\rho - \vec{F}_{ie}\cdot\vec{e}_\rho} \approx \frac{m\Omega^2 R_T\cos(\lambda)\sin(\lambda)}{mM_TG/R_T^2}$$

Car

$$\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 R_t(\cos^2(\lambda)\vec{e}_\rho + \cos(\lambda)\sin(\lambda)\vec{e}_\theta) \quad \text{et} \quad \vec{F}_g = -\frac{GM_Tm}{{R_T}^2}\vec{e}_\rho$$

D'où

$$\boxed{\alpha \simeq \frac{\Omega^2 {R_T}^3}{GM_T}\cos(\lambda)\sin(\lambda) \simeq 1{,}5\times10^{-3}\,\text{rad} \ll 1}$$

Donc la somme vectorielle de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entraînement est quasi-parallèle au vecteur $\vec{e}_\rho$ et de norme quasiment égale à celle de la force de gravitation. D'où le fait que l'on confonde dans l'exercice la verticale au rayon terrestre. Il est donc légitime de négliger la force d'inertie d'entraînement par rapport à la force de gravitation.

Par ailleurs, étant donné que la masse restera tout au long du mouvement au voisinage du point O, on pourra écrire que $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_z$, avec $g = \frac{GM_t}{{R_t}^2} \simeq 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

2. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen (puisqu'on l'on néglige toutes les forces d'inertie), seules deux forces s'exercent sur la masse m : son poids et la force de tension ($\vec{T} = -T\vec{e}_r$) du fil. Par application de la deuxième loi de Newton à la masse m, on a

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{T} \quad .$$

Après projection, on obtient le système

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\alpha}^2 &= mg\cos\alpha - T \\ m\ell\ddot{\alpha} &= -mg\sin\alpha \end{cases}$$

3. Si $|\alpha| \ll 1$, alors $\sin\alpha \ll 1$ et l'équation du mouvement est bien celle d'un oscillateur harmonique :

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \frac{g}{\ell}\alpha = 0}$$

Par identification, on a directement

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

La période d'oscillation est

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \simeq 15\,\text{s} \quad .}$$

4. Pour un angle α, la variation d'altitude par rapport à la position basse est $\Delta z = \ell(1-\cos\alpha) = \ell(o(\alpha))$ tandis que la variation de position horizontale est $\Delta x = \ell\sin\alpha = \ell(\alpha + o(\alpha))$. Donc au premier ordre en α, le mouvement est bien horizontal.

1.2 Effet de la force d'inertie de Coriolis

5. La pulsation Ω correspond à la rotation sidérale de la Terre avec une période $J \simeq 1\,\text{jour}$, donc $\Omega = 2\pi/J \simeq 7 \times 10^{-5}\,\text{rad/s} \ll \omega_0$.

6. $\vec{e}_3 = \cos(\lambda)\vec{e}_y + \sin(\lambda)\vec{e}_z$, donc la force de Coriolis a pour expression

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\lambda) \\ \sin(\lambda) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = 2m\Omega\left[\sin(\lambda)\dot{y}\vec{e}_x - \sin(\lambda)\dot{x}\vec{e}_y + \cos(\lambda)\dot{x}\vec{e}_z\right]$$

On négligera la composante selon z, car on approche le mouvement à un mouvement horizontal.
L'application de la deuxième loi de Newton à la masse m dans le référentiel terrestre conduit directement au système indiqué par l'énoncé en posant $\boxed{\tilde{\Omega} = \Omega\sin(\lambda)}$.

7. L'équation différentielle vérifiée par u est

$$\ddot{u} + 2i\tilde{\Omega}\dot{u} + {\omega_0}^2 u = 0$$

dont les racines de l'équation caractéristique sont

$$r_\pm = i\left(\pm\sqrt{{\omega_0}^2 + \tilde{\Omega}^2} - \tilde{\Omega}\right)$$

La solution générale de cette équation différentielle est donc

$$\boxed{u = A\exp(r_+ t) + B\exp(r_- t)}$$

où A et B sont deux constantes d'intégration complexes.

8. En raison des conditions initiales choisies, A et B vérifient le système

$$\begin{cases} A + B &= x_0 \\ r_+ A + r_- B &= 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$A = \frac{r_-}{r_- - r_+}x_0 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{r_+}{r_+ - r_-}x_0$$

On en déduit que

$$\boxed{u = x_0\frac{[r_+\exp(r_- t) - r_-\exp(r_+ t)]}{r_+ - r_-}}$$

9. Sachant que $\tilde{\Omega} \ll \omega_0$, on peut effectuer les approximation suivantes

$$r_\pm \simeq i\left(\pm\omega_0 - \tilde{\Omega}\right)$$

$$A \simeq B \simeq \frac{x_0}{2}$$

On en déduit une expression simplifiée de u :

$$\boxed{u \simeq x_0\cos(\omega_0 t)\exp(-i\tilde{\Omega}t)}$$

Ainsi, la position de la masse est donné à tout instant par le vecteur

$$\boxed{vectOM = x_0\cos(\omega_0 t)\underbrace{\left[\cos(\tilde{\Omega}t)\vec{e}_x - \sin(\tilde{\Omega}t)\vec{e}_y\right]}_{\vec{u}(t)}}$$

en notant O le point le plus bas de la trajectoire de la masse. Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur unitaire tournant à la vitesse angulaire $\tilde{\Omega} \ll \omega_0$ dans le sens indirect par rapport au vecteur $\vec{e}_z$. Ainsi, à tout instant on peut définir un plan d'oscillation instantanée par $(O, \vec{e}_z, \vec{u}(t))$. Le pendule oscille donc à la pulsation ω_0 comme dans le cas où l'on ne tient pas compte de la force de Coriolis, mais le plan des oscillations tourne dans le sens indirect autour de $(O, \vec{e}_z)$ à la vitesse angulaire $\tilde{\Omega}$.

10. Directement, $\boxed{\psi = -\tilde{\Omega}T = -2\pi \sin(\lambda) \simeq -271\ ^\circ}$. Pour que le plan d'oscillation revienne à sa position initiale au bout de 24 heures, il faut que $\psi = 0[2\pi]$, ce qui impose $\lambda = 0$, ce qui correspond à tous les points situés à l'équateur.
11. Plus la longueur est grande, plus la période est grande, plus la vitesse du pendule est faible et plus faibles seront les frottements. Plus la masse est grande et plus les frottements seront faibles par rapport au poids (pour une même géométrie de la masse). L'intérêt d'avoir une grande longueur et une grande masse est de minimiser les frottements pour que le pendule ait le temps d'osciller assez longtemps pour que le phénomène de rotation du plan d'oscillation soit visible.
12. Avec un tel pendule, notamment tenu à la main, les oscillations s'amortiront bien avant que l'on puisse détecter la moindre rotation du plan (qui, si elle est mesurable, permet de renseigner sur la latitude du point où se déroule l'expérience). Le professeur Tournesol ne peut donc absolument pas s'orienter à l'aide de son pendule.

Exercice 2: Prédiction et mesure d'une partie des propriétés mécaniques de l'ADN ***(Banque PT 2023)***

1.3 Modèle naïf de l'élasticité de brins d'ADN courts (< 30 paires de bases)

1. Deux forces s'exercent sur le point A, une par le ressort à sa gauche, et l'autre par le ressort à sa droite. On en déduit

$$\boxed{\vec{F}_{g\to A} = -k_1(x_1 + l_0 - l_0)\vec{e}_x = -k_1 x_1 \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{F}_{d\to A} = +k_2(x_2 - x_1 + l_0 - l_0)\vec{e}_x = +k_2(x_2 - x_1)\vec{e}_x.}$$

   Commen attendu, ces forces sont bien nulles lorsque $x_1 = x_2 = 0$, à l'équilibre.
   La point B est soumis à une unique force (ressort à sa gauche), qui s'obtient à l'aide de la troisième loi de Newton selon

$$\boxed{\vec{F}_{g\to B} = -\vec{F}_{d\to A} = -k_2(x_2 - x_1)\vec{e}_x.}$$

2. A l'équilibre, les résultantes des forces appliquées à A et B sont nulles. On en déduit pour A

$$-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_2}$$

   De même, on a pour le point B

$$-k_2(x_2 - x_1) + F_0 = 0 \Rightarrow F_0 = k_2 x_2 \left(1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2}\right) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_2 = k_{eq} x_2$$

   En effet, dans le cas d'un unique ressort, la force F_0 serait bien égale à $k_{eq}(x_2 + 2l_0 - 2l_0) = k_{eq} x_2$. On en déduit par idenfication que

$$\boxed{k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

3. Entre ces sept bases, il y a six liaisons d'où par généralisation du résultat précédent :

$$\frac{1}{k_{seq}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \dots \frac{1}{k} \Rightarrow \boxed{k_{seq} = \frac{k}{6}}$$

4. Cette fois-ci, on considère les deux brins, qui exercent chacun la même résistance à l'élongation. Pour un même déplacement, la force (et donc la raideur) est doublée d'où

$$\boxed{k_{db} = 2k_{seq} = \frac{k}{3}}$$

5. Le modèle semble valide pour un allongement relatif compris entre 0 et 0.9, au dela, la courbe n'est plus associée à une droite passant par l'origine.

6. On a $F_0 = k_{ADN}x = k_{ADN}x/(nl_0) \times nl_0$ avec n le nombre de liaisons soit en notant l'élongation relative $e = x/(nl_0)$, $F_0 = k_{ADN} \times nl_0 e$. De plus, d'après les questions précédentes, on remarque que

$$k_{ADN} = \frac{2}{n}k$$

On en déduit alors

$$F_0 = \frac{2}{n}kenl_0 = 2kel_0$$

On mesure graphiquement $F_0 = 3\,\text{pN}$ pour $e = 0,9$ d'où

$$\boxed{k = \frac{F_0}{2el_0} \approx 0{,}6\,\text{N/m}}$$

Il est important de remarquer que la lecture graphique n'est vraiment pas précise. L'incertitude associée est donc très élevée.

1.4 Elasticité d'un long brin d'ADN (> 200 paires de bases)

7. On a $\langle \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \rangle = a^2 \langle \cos(\theta_{i,j}) \rangle = 0$ car cos est en moyenne nulle sur $[0, 2\pi[$.

8. On a $\left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle \vec{r}_i \rangle = N \langle \vec{r}_i \rangle = \vec{0}$ car la direction de chaque batonnêt est aléatoire.

De plus, $\langle r^2 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \right\rangle = Na^2$ car le deuxième terme dans la moyenne est nul d'après la question précédente.

9. On a $\boxed{F(x) = -\frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x} = -k'\frac{x}{Na^2} = -\frac{3k_bT}{La}x}$

1.5 Manipulation des molécules d'ADN

10. On a les forces $-q\vec{E}$ et $q\vec{E}$ d'où une résultante $\boxed{\vec{F}_E = \vec{0}}$ en cas de champ uniforme.

11. On a $-q\vec{v}_1 \wedge \vec{B}$ puis $+q\vec{v}_2 \wedge \vec{B}$ soit une résultante

$$\vec{F}_B = q(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \wedge \vec{B} = q\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{B} = q\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{B}$$

d'où le résultat.

12. Cette onde se propage selon l'axe $O, \vec{e}_z$ (z dans le cosinus) et est polarisée selon $\vec{e}_y$.

13. On a $E^2 = E_0^2 \exp\left(-2\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \cos^2(\omega t - kz)$ que l'on peut dériver par rapport aux variables spatiales x et y pour obtenir le gradient. On en déduit

$$\overrightarrow{\text{grad}}(E^2) = -4(x/\sigma^2)E_0^2 \exp\left(-2\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \cos^2(\omega t - kz)\vec{e}_x + 2kE_0^2 \exp\left(-2\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \cos(\omega t - kz)\sin(\omega t - kz)\vec{e}_z$$

On remarque que la composante selon $\vec{e}_y$ est nulle en moyenne car s'expriment en fonction de $\sin(2 \times (\omega t - kz))$ dont la moyenne temporelle est nulle. On en déduit au final

$$\boxed{\left\langle \vec{F}_1 \right\rangle = -\alpha\frac{x}{\sigma^2}E_0^2 \exp\left(-2\frac{x^2}{\sigma^2}\right)\vec{e}_x}$$

14. On a par définition de la moyenne

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{f(T)-f(0)}{T} = 0$$

car f est T périodique. Ce résultat peut aussi être démontré à partir de la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique. Sa dérivée ne comporte pas de terme constant et les autres termes, tous harmoniques, sont de moyennes nulles, d'où le résultat.

On remarque que $\vec{E}$ étant périodique, il en va de même pour $\vec{E}\wedge\vec{B}$ donc la force $\vec{F}_2$ est nulle en moyenne par application du résultat précédent.

15. On a alors $\boxed{\left\langle \vec{F}_1 \right\rangle \approx -\alpha\left(\frac{E_0}{\sigma}\right)^2 x}$ soit l'expression d'une force de rappel élastique, qui tend à maintenir à la bille proche de la position d'équilibre en $x = 0$.