

Feuille d'exercices n°04

Exercice 1 (*)

On pose $\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$

avec $X = \mathbb{R}_+$ et $I = \mathbb{R}_+$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction φ est continue (par morceaux) et intégrable sur I puisque $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, d'après le théorème de continuité sous l'intégrale, on conclut

La fonction F est bien définie, continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale sur le domaine $X' =]0; +\infty[$.

- Pour $x > 0$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et intégrable d'après la domination de la question précédente.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X', \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X' \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{-te^{-tx}}{1+t^2}$$

- Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

- Domination : On a $\forall t \in I \quad \sup_{x>0} \left| \frac{-te^{-tx}}{1+t^2} \right| = \frac{t}{1+t^2}$

Mais la fonction $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$ n'est pas intégrable sur I puisque $\frac{t}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ (critère de Riemann et critère des équivalents licite car signe constant). On procède à une domination locale. Pour $a > 0$, on a

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{te^{-at}}{1+t^2}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. Par comparaison et critère de Riemann, la dominante φ est intégrable sur I et d'après le théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale, on a $F \in \mathcal{C}^1([a; +\infty[, \mathbb{R})$ et ce pour tout $a > 0$ d'où

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[, \mathbb{R})}$$

Exercice 2 (*)

Pour x réel, on pose $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$

1. Montrer que F et G sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F' + G'$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Corrigé : 1. On pose

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0 \quad g(t) = e^{-t^2}$$

avec $X = \mathbb{R}$ et $I = [0; 1]$. La fonction G est le carré d'une primitive de la fonction continue g . Puis, on vérifie :

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et intégrable sur le segment I .
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$$

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.
- Domination : Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2a$$

et $t \mapsto 2a$ est continue par morceaux et intégrable sur le segment I . La fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a; a]$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\text{Les fonctions } F \text{ et } G \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Remarque : On a $\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2|x|e^{-x^2}$

et par une étude de fonctions, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 2|x|e^{-x^2} \leq \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

ce qui permet de faire une domination globale (luxue inutile...).

2. Par dérivation, on trouve pour x réel

$$F'(x) + G'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Le changement de variable $u = xt$ dans la première intégrale permet d'obtenir

$$\boxed{F' + G' = 0}$$

3. La fonction $F + G$ de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est donc constante. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (F + G)(x) = (F + G)(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

Par ailleurs, on a $\forall (x, t) \in X \times I \quad 0 \leq f(x, t) \leq e^{-x^2}$

D'où, après intégration $\forall x \in X \quad 0 \leq F(x) \leq e^{-x^2}$

et par encadrement $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi $G(x) = \frac{\pi}{4} + o(1)$

On conclut $\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge et vaut } \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Exercice 3 (*)

On pose $\forall x > 0 \quad F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt \quad \text{et} \quad \Lambda = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$

1. Justifier que F est bien définie, continue sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$. On pourra chercher à exprimer $F(x)$ en fonction de Λ pour $x > 0$.

Corrigé : 1. On pose $f(x, t) = e^{-xt^2}$ pour $(x, t) \in X \times I$ avec $X =]0; +\infty[$ et $I = [0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t)$ continue (par morceaux) sur I par théorèmes généraux.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t)$ continue sur X par théorèmes généraux.
- Domination : on procède localement car $\sup_{x>0} e^{-xt^2} = 1$ et $t \mapsto 1$ n'est pas intégrable sur I .

Pour $a > 0$, on a

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = e^{-at^2}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}_+)$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées d'où son intégrabilité sur I .

Ainsi, d'après le théorème de continuité sous l'intégrale, la fonction F est bien définie et continue sur tout $[a; +\infty[$ avec $a > 0$ d'où

La fonction F est bien définie et continue sur $]0; +\infty[$.

2. Soit $x > 0$. Avec le changement de variables $u = \sqrt{x}t$, les intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ sont de même nature donc convergentes et égales et par conséquent

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{\Lambda}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

Exercice 4 (**)

Pour x réel, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt$

1. Établir que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que F est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

3. En déduire une expression de $F(x)$ pour x réel.

On admettra l'égalité
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt)$

avec $X = \mathbb{R}$ et $I = [0; +\infty[$. Vérifions les différentes hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

• Soit $x \in X$. On a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ puis,

$$\operatorname{ch}(2xt) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(e^{2|x|t}) \implies e^{-t^2/2} \operatorname{ch}(2xt) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(e^{-t^2/2+2|x|t}) = o(1)$$

Par croissances comparées, il vient $t^2 e^{-t^2/2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1)$ d'où

$$t^2 f(x, t) = t^2 e^{-t^2/2} \times e^{-t^2/2} \operatorname{ch}(2xt) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1)$$

ce qui signifie $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Il s'ensuit que $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I .

• Pour tout $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = 2t \operatorname{sh}(2xt) e^{-t^2}$$

• Pour tout $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.

• Domination : La fonction $x \mapsto \operatorname{sh}(2xt)$ n'étant pas bornée sur $X = \mathbb{R}$, il est impératif de passer par une domination locale. Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x, t) \in [-a; a] \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(2at)$$

Comme précédemment, le théorème des croissances comparées donne $t^2 \times 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(2at) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ et on en déduit l'intégrabilité de la fonction dominante. D'après le théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale, il s'ensuit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a; a]$ et ce pour tout $a > 0$ d'où finalement

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} 2te^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt) dt$$

On intègre par parties, les limites du crochet étant finies, et on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \underbrace{\left[-e^{-t^2} \operatorname{sh}(2xt) \right]_0^{+\infty}}_{=0} + 2x \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(2xt) dt$$

Il s'ensuit

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = 2xF(x)$

3. On constate donc que F est solution de l'équation différentielle

$$y' - 2xy = 0$$

Il s'ensuit que $F(x) = \lambda e^{x^2}$ pour x réel et $\lambda = F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss).

On conclut

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}$

Exercice 5 (**)

Pour $x > 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} e^{-xt} dt$$

1. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
3. En déduire une expression de $F(x)$ pour tout $x > 0$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} e^{-xt}$

avec $X =]0; +\infty[$ et $I =]0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

- Soit $x \in X$. On a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ puis, avec le développement $\cos u = 1 + O(u)$, il vient $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{=} O(1)$ et on a $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées. On en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$ sur I .
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur X par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (\cos(2t) - \cos(t)) e^{-xt}$$

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.
- Domination : Une domination globale ne fonctionne pas car l'exponentielle « s'évanouit » en zéro. Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |\cos(t) - \cos(2t)| e^{-xt} \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 2e^{-at}$$

La dominante φ est intégrable sur I puisque $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \left[-\frac{2}{a} e^{-at} \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{a}$.

Ainsi, d'après le théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale, on a F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; +\infty[$ avec $a > 0$ quelconque d'où

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[, \mathbb{R})}$$

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, comme $|\cos'| = |\sin| \leq 1$, la fonction $\cos$ est 1-lipschitzienne. Il vient

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad 0 \leq |f(x, t)| = \left| \frac{\cos(t) - \cos(2t)}{t} \right| e^{-xt} \leq \left| \frac{t - 2t}{t} \right| e^{-xt} = e^{-xt}$$

Comme $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge pour $x > 0$, il vient par comparaison et inégalité triangulaire

$$\forall x > 0 \quad 0 \leq |F(x)| \leq \int_0^{+\infty} |f(x, t)| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

Par encadrement, on conclut

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0}$$

Remarque : On peut procéder par convergence dominée mais c'est inutilement élaboré.

3. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} [\cos(2t) - \cos(t)] e^{-xt} dt$$

Par linéarité car convergence de $\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-xt} dt$ et $\int_0^{+\infty} \cos(2t)e^{-xt} dt$, on obtient

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(2t)e^{-xt} dt - \int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-xt} dt$$

Enfin par intégrabilité de $t \mapsto e^{(i-x)t}$ et $t \mapsto e^{(2i-x)t}$ sur I , on trouve

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad F'(x) &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(2i-x)t} dt - \int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x-2i} - \frac{1}{x-i} \right) = \frac{x}{x^2+4} - \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Après intégration, on a

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln(4+x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \alpha = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4+x^2}{1+x^2} \right) + \alpha$$

avec α réel. Enfin, on a $\frac{4+x^2}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ d'où $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha = 0$. On conclut

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4+x^2}{1+x^2} \right)$$

Exercice 6 (**)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} dt$$

1. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Pour x réel, calculer $F''(x)$ puis $F'(x)$.
3. En déduire une expression de $F(x)$ pour x réel.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t}$

avec $X = \mathbb{R}$ et $I =]0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^2$ sous l'intégrale.

• Soit x réel. On a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$. Avec l'inégalité $|\sin u| \leq |u|$ pour u réel, il vient

$$\forall t > 0 \quad 0 \leq \frac{\sin^2(xt)}{t^2} e^{-t} \leq x^2 e^{-t}$$

d'où l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$ sur I .

• Pour tout $t > 0$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^2(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(2xt)}{t} e^{-t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = 2 \cos(2xt) e^{-t}$$

• Soit $x \in X$. On a
$$\forall t > 0 \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2|x| e^{-t}$$

et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ d'où l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ sur I .

• Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.

• Domination : On a $\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq 2e^{-t}$

avec une dominante qui est clairement intégrable sur I . Par régularité $\mathcal{C}^2$ sous l'intégrale, on conclut

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{t} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} 2 \cos(2xt) e^{-t} dt$$

La fonction $t \mapsto 2e^{i2xt}e^{-t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ puisque

$$\int_0^{+\infty} |2e^{i2xt}e^{-t}| dt = \int_0^{+\infty} 2e^{-t} dt = [-2e^{-t}]_0^{+\infty} = 2$$

Ainsi, pour x réel

$$F''(x) = 2 \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(2ix-1)t} dt \right) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-2ix} \right) = \frac{2}{1+4x^2}$$

puis

$$F'(x) = \underbrace{F'(0)}_{=0} + \int_0^x \frac{2dt}{1+4t^2} = \operatorname{Arctan}(2x)$$

On conclut

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F''(x) = \frac{2}{1+4x^2} \quad F'(x) = \operatorname{Arctan}(2x)$$

3. Une dernière intégration donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = F(0) + \int_0^x F'(t) dt = F(0) + \int_0^x \operatorname{Arctan}(2t) dt$$

On a clairement $F(0) = 0$ puis une intégration par parties donne pour x réel

$$F(x) = [t \operatorname{Arctan}(2t)]_0^x - \int_0^x \frac{2t dt}{1+4t^2}$$

On conclut

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = x \operatorname{Arctan}(2x) - \frac{1}{4} \ln(1+4x^2)$$

Exercice 7 (**)

À l'aide d'une intégrale à paramètre, établir que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : On pose $f(x, t) = \cos(tx)$ pour $(x, t) \in X \times I$ avec $X = \mathbb{R}$, $I = [0; 1]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^1 \cos(tx) dt$$

On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit n entier non nul. Vérifions les hypothèses de régularité $\mathcal{C}^n$ sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ donc intégrable sur le segment I .
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^n(X, \mathbb{R})$ d'après les théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = t^k \cos\left(tx + \frac{k\pi}{2}\right)$$

- Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ donc intégrable sur le segment I .
- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.
- Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 1$$

La fonction φ est clairement intégrable sur I . D'après le théorème de régularité $\mathcal{C}^n$ sous l'intégrale, on a $F \in \mathcal{C}^n(X, \mathbb{R})$ et ce pour tout n entier non nul. Enfin, la fonction F coïncide avec $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ ce qui prouve

La fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.