

Feuille d'exercices n°05

Exercice 1 (**)

On pose $\forall x > -1 \quad F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)} dt$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1 ; +\infty [$.
2. En déduire une expression de $F(x)$ pour $x > -1$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{t^x - 1}{\ln(t)}$

avec $X =] -1 ; +\infty [$ et $I =] 0 ; 1 [$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

- Soit $x \in X$. On a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ puis

$$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \begin{cases} o(1) & \text{si } x \geq 0 \\ O\left(\frac{1}{t^{-x}}\right) & \text{si } x \in] -1 ; 0 [\end{cases} \quad \text{et} \quad f(x, t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{x(t-1)}{t-1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} x$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable en 0 par comparaison et éventuellement critère de Riemann et en 1 car prolongeable par continuité.

- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = t^x$$

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On procède localement pour empêcher x d'être arbitrairement proche de -1 . Soit $a > -1$. On a

$$\forall (x, t) \in [a ; +\infty[\times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{t^{-a}}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$, intégrable sur I par critère de Riemann puisque $-a < 1$. Par conséquent, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a ; +\infty[$ pour tout $a > -1$ d'où

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(]-1 ; +\infty[, \mathbb{R})}$$

2. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x > -1 \quad F'(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$$

Ainsi $\forall x > -1 \quad F(x) = F(0) + \int_0^x \frac{du}{u+1}$

On conclut $\boxed{\forall x > -1 \quad F(x) = \ln(1+x)}$

Exercice 2 (**)

On pose $\forall x \geq 0 \quad F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x \sin(t)^2) dt$

1. Justifier que F est bien définie et continue sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.
3. Préciser une expression de $F'(x)$ avec $x \geq 0$ à l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$.
4. Conclure que $\forall x \geq 0 \quad F(x) = \pi [\ln(1 + \sqrt{1+x}) - \ln(2)]$

1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \ln(1 + x \sin(t)^2)$

avec $X = [0; +\infty[$ et $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a $\sup_{x \geq 0} |f(x, t)| = +\infty$ donc il faut procéder localement. Soit $a \geq 0$. On a

$$\forall (x, t) \in [0; a] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad |f(x, t)| \leq \ln(1 + a)$$

Comme une fonction constante est intégrable sur un segment, il s'ensuit que F est continue sur $[0; a]$ pour tout $a \geq 0$ d'où

La fonction F est bien définie, continue sur $[0; +\infty[$.

2. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et intégrable sur le segment I .
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, il vient

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(t)^2}{1 + x \sin^2 t}$$

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1$$

Et la dominante constante est intégrable sur le segment I . Ainsi

$$F \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[, \mathbb{R})$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, on a

$$\forall x \geq 0 \quad F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)^2}{1 + x \sin(t)^2} dt$$

En factorisant $\cos^2 t$ au numérateur et dénominateur, on trouve

$$\forall x \geq 0 \quad F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)^2}{1 + (1+x) \tan(t)^2} dt$$

Avec le changement de variable $u = \tan(t) \iff t = \text{Arctan}(u)$ où $\text{Arctan} :]0; +\infty[\rightarrow \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ est bijectif, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant, on obtient l'égalité (la convergence étant assurée)

$$\forall x \geq 0 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)^2}{1 + (1+x)\tan(t)^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(1 + (1+x)u^2)(1+u^2)} du$$

Pour $x > 0$, on trouve la décomposition en éléments simples

$$\frac{u^2}{(1 + (1+x)u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{x} \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1 + (1+x)u^2} \right]$$

Puis $\forall x > 0 \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1 + (1+x)u^2} \right] du = \frac{\pi}{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)$

En mettant au même dénominateur et en multipliant par l'expression conjuguée, on trouve

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}$$

Par continuité de F' en 0, on conclut

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad F'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)}}$$

4. Enfin, avec le changement de variables $u = \sqrt{1+t}$, on trouve

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) = F(0) + \int_0^x F'(t) dt = \pi \int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{du}{1+u} = \pi [\ln(1+u)]_1^{\sqrt{1+x}}$$

D'où

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad F(x) = \pi [\ln(1 + \sqrt{1+x}) - \ln(2)]}$$

Exercice 3 (***)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \exp \left[- \left(t^2 + \frac{x^2}{t^2} \right) \right] dt$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
3. Former une équation différentielle vérifiée par F sur $]0; +\infty[$.
4. En déduire une expression simple de F sur $\mathbb{R}$.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \exp \left[- \left(t^2 + \frac{x^2}{t^2} \right) \right]$

avec $X = \mathbb{R}$ et $I =]0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème continuité sous l'intégrale.

- Pour x réel, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = e^{-t^2}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est définie, continue sur } \mathbb{R}.}$$

2. On note $X' =]0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

• Pour $x \in X'$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et intégrable d'après la domination de la question précédente.

• Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X' \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x}{t^2} \exp \left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2} \right) \right]$$

• Pour $x \in X'$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

• Domination : On procède localement. Soit $[a; b] \subset X'$. On a

$$\forall (x, t) \in X' \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = 2b \frac{e^{-\frac{a^2}{t^2}}}{t^2} e^{-t^2}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ avec $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ par croissances comparées puisque

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{a^2}{t^2}}}{t^2} \underset{u=1/t}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 e^{-a^2 u^2} = 0$$

La fonction φ est donc intégrable sur I et par conséquent, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment $[a; b] \subset X'$ d'où

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(]0; +\infty[, \mathbb{R})}$$

3. Par dérivation sous l'intégrale, il vient

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} \exp \left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2} \right) \right] dt$$

Avec le changement de variables $u = \frac{x}{t}$, on obtient l'égalité (la convergence étant assurée)

$$\int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2} \exp \left[-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2} \right) \right] dt = -2 \int_0^{+\infty} \exp \left[-\left(\frac{x^2}{u^2} + u^2 \right) \right] du$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x > 0 \quad F'(x) + 2F(x) = 0}$$

4. On en déduit

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \lambda e^{-2x}$$

Par continuité en 0, il vient $\lambda = F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Enfin, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et est paire d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}}$$

Exercice 4 (***)

Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt$$

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $F'(x)$ pour $x \neq 1$ puis montrer que l'expression vaut aussi pour $x = 1$.
3. En déduire une expression simple de $F(x)$.

4. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(t)^2}{t^2} dt$$

Corrigé : 1. On pose $\forall(x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$

avec $X = \mathbb{R}_+$ et $I =]0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

• Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Puis, on a

$$f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{xt}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} x \quad \text{et} \quad f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve l'intégrabilité de $t \mapsto f(x, t)$ sur I .

• Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall(x, t) \in X \times I \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

• Pour $x \in X$, on a $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.

• Domination : On a

$$\forall(x, t) \in X \times I \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

La fonction φ est dans $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$, intégrable sur I puisque $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})}$$

2. Soit $x \geq 0$ et $x \neq 1$. Par décomposition en éléments simples, on trouve

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right]$$

On suppose également $x \neq 0$ pour l'intégration du second membre. Il vient

$$F'(x) = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right] dt = \frac{1}{1-x^2} \frac{\pi}{2} (1-x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

La formule vaut aussi pour $x = 0$. Par ailleurs, comme F' est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $F'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F'(x)$ et par conséquent

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}}$$

Remarque : Pour faire efficacement la décomposition en éléments simples, on peut considérer

$$\frac{1}{(1+u)(1+x^2u)} = \frac{x^2u+1-x^2(u+1)}{(1+u)(1+x^2u)} \frac{1}{1-x^2}$$

et l'appliquer en $u = t^2$.

3. Par intégration, il vient

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad F(x) = F(0) + \int_0^x F'(u) du = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)}$$

4. Les fonctions $t \mapsto \operatorname{Arctan}(t)^2$ et $t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. On a

$$-\frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\frac{t^2}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, d'après le théorème d'intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} -\frac{2 \operatorname{Arctan} t}{t(1+t^2)} dt = -2F(1)$$

sont de même nature donc convergentes et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{t^2} dt = \left[-\frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{t} \right]_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t(1+t^2)} dt$$

On conclut

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(t)^2}{t^2} dt = \pi \ln(2)}$$

Exercice 5 (***)

Pour $x > 0$, on pose
$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x} dt$$

1. Montrer que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Déterminer les limites de F en 0^+ et en $+\infty$.
3. Déterminer des équivalents de F en 0^+ et en $+\infty$.

Corrigé : 1. Posons $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\cos(t)}{t+x}$

avec $X =]0; +\infty[$ et $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I par théorèmes généraux.
- Pour $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur X par théorèmes généraux.
- Domination : Une domination globale ne fonctionne pas. Soit $a > 0$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; +\infty[\times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{\cos(t)}{a+t}$$

et la fonction φ est intégrable sur I comme fonction continue sur un segment. D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, on a F continue sur $[a; +\infty[$ pour tout $a > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est définie, continue sur }]0; +\infty[.}$$

2. Sans difficulté, on trouve

$$\forall x > 0 \quad 0 \leq F(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{x} dt = \frac{1}{x}$$

Par encadrement

$$\boxed{F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$$

Par étude de fonction ou inégalité des accroissements finis, on montre

$$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos(t) \geq 1 - t$$

Il vient $\forall x > 0 \quad F(x) \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-t}{t+x} dt$

et $\forall x > 0 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-t}{t+x} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x-(t+x)}{t+x} dt = (1+x) \left[\ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \ln(x) \right] - \frac{\pi}{2}$

Par comparaison $\boxed{F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty}$

Variante : Avec un changement de variable, on trouve

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\cos(u-x)}{u} du = \cos(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\cos(u)}{u} du + \sin(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\sin(u)}{u} du$$

Par limite monotone, on a $x \mapsto \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{u} du$ qui décroît donc admet une limite infinie en 0^+ sans quoi l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{u} du$ serait convergente ce qui est absurde. Les autres termes ont tous une limite finie d'où le résultat.

3. Par monotonie et croissance de l'intégrale, on a

$$\forall x > 0 \quad \frac{1}{\frac{\pi}{2} + x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt$$

Et par conséquent

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$$

Variante : On a $\forall x > 0 \quad xF(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1 + \frac{x}{t}} dt$

Par convergence dominée avec la dominante constante $t \mapsto 1$, on obtient

$$xF(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 1$$

et on retrouve le résultat précédent.

On a exhibé un minorant explicite à $F(x)$ pour $x > 0$ dans la question précédente. On a également

$$\forall x > 0 \quad F(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{x+t} = \ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \ln(x)$$

Le majorant et le minorant sont tous deux équivalents à $-\ln(x)$ pour $x \rightarrow 0^+$ d'où la conclusion

$$\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)}$$

Variante : On a établi

$$\forall x > 0 \quad F(x) = \cos(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\cos(u)}{u} du + \sin(x) \int_x^{\frac{\pi}{2}+x} \frac{\sin(u)}{u} du$$

On peut couper la première intégrale en $\frac{\pi}{2}$ par relation de Chasles puis observer par intégration de relation de comparaison

$$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{u} du \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 6 (****)

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2} dt$

1. Montrer que F est définie, continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier la dérivabilité de F en zéro.

Corrigé : 1. On pose $\forall (x, t) \in X \times I \quad f(x, t) = \frac{\sin(xt)}{1+t^2}$

avec $X = \mathbb{R}$ et $I =]0; +\infty[$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale.

- Pour $x \in X$, on a $t \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On a

$$\forall (x, t) \in X \times I \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

On a $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ et intégrable sur I puisque $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$. Ainsi

La fonction F est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $t \in I$, on a $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux et par dérivation

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+ \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{t \cos(xt)}{1+t^2}$$

Il semble alors compromis d'établir une domination intégrable. Transformons l'intégrale d'origine. Soit $X' =]0; +\infty[$. Pour $x \in X'$, avec le changement de variables $u = xt$, on obtient l'égalité (la convergence étant assurée)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2} dt = xG(x) \quad \text{avec} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{x^2 + u^2} du$$

On pose $\forall (x, t) \in X' \times I \quad g(x, t) = \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2}$

Vérifions les hypothèses du théorème de régularité $\mathcal{C}^1$ sous l'intégrale.

- Pour $x > 0$, on a $t \mapsto g(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur I .
- Pour $t \in I$, on a $x \mapsto g(x, t) \in \mathcal{C}^1(X', \mathbb{R})$ par théorèmes généraux. Par dérivation, on trouve

$$\forall (x, t) \in X' \times I \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x \sin(t)}{(x^2 + t^2)^2}$$

- Pour $x > 0$, on a $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ par théorèmes généraux.
- Domination : On procède localement. Soit $[a; b] \subset X'$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times I \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t) \quad \text{avec} \quad \psi(t) = \frac{2b}{(a^2 + t^2)^2}$$

On a $\psi \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R}_+)$ et $\psi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ d'où son intégrabilité sur I . Ainsi, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de X' donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur X' et donc F également. Par imparité de F , on conclut

$$\boxed{F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})}$$

3. Soit $x \neq 0$. D'après ce qui précède, on a

$$\frac{F(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2 + x^2} du = H(x) + K(x)$$

avec
$$H(x) = \int_0^1 \frac{\sin(u)}{u^2 + x^2} du \quad \text{et} \quad K(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2 + x^2} du$$

Sans difficultés, on a K définie continue en 0. La fonction H décroît sur $]0; +\infty[$ donc admet une limite en 0^+ (de même en 0^- par parité). Soit $\varepsilon \in]0; \pi[$. Par positivité de l'intégrande, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad H(x) \geq \int_\varepsilon^\pi \frac{\sin(u)}{u^2 + x^2} du$$

Par continuité sous l'intégrale de droite ci-dessus (sans difficulté), il vient par passage à la limite

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) \geq \int_\varepsilon^\pi \frac{\sin(u)}{u^2} du$$

Or, la fonction $u \mapsto \frac{\sin(u)}{u^2}$ est positive non intégrable sur $]0; \pi[$ d'où

$$\int_\varepsilon^\pi \frac{\sin(u)}{u^2} du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} +\infty$$

On en déduit
$$\frac{F(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

Et on conclut

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

Variante : D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin(u) - u| \leq \frac{u^2}{2}$$

et il vient
$$\left| H(x) - \int_0^1 \frac{u}{u^2 + x^2} du \right| \leq \int_0^1 \frac{|\sin(u) - u|}{u^2 + x^2} du \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{u^2}{u^2 + x^2} du$$

et
$$\int_0^1 \frac{u^2}{u^2 + x^2} du = 1 - x^2 \int_0^1 \frac{du}{u^2 + x^2} = 1 - x \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(1)$$

Ainsi
$$H(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \left[\frac{1}{2} \ln(u^2 + x^2) \right]_0^1 + O(1) = -\ln(x) + O(1)$$

Par conséquent
$$\frac{F(x)}{x} = -\ln(x) + O(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$$

On retrouve le résultat précédent.