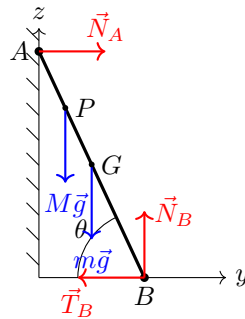


TD 3 : Frottement solide

Exercice 1: Équilibre d'une échelle (★)

1. On note :

- $\vec{N}_A = N_A \vec{e}_y$ la réaction normale du mur en A (sans frottement) ;
- $\vec{N}_B = N_B \vec{e}_z$ la réaction normale du sol en B ;
- $\vec{T}_B = -T_B \vec{e}_y$ la force de frottement du sol en B ;
- $\vec{P}(P) = -Mg \vec{e}_z$ le poids de la personne en P de l'échelle ;
- $\vec{P}(G) = -mg \vec{e}_z$ le poids de l'échelle au centre de masse de l'échelle G , milieu de $[AB]$.



L'échelle est en équilibre statique.

Équilibre des forces Projection suivant l'horizontale :

$$-T_B + N_A = 0.$$

Projection suivant la verticale :

$$N_B - (m + M)g = 0.$$

On en déduit

$$N_B = (m + M)g.$$

La condition d'adhérence au sol est alors

$$T_B \leq f N_B = f(m + M)g.$$

Équilibre des moments On calcule les moments au point B .

Le poids de l'échelle est appliqué en son centre et crée le moment

$$\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{P}_{\text{échelle}}) = mgl \cos \theta \vec{e}_x.$$

Si la personne est située à une distance $d = \|\vec{BP}\|$ du pied de l'échelle, son poids crée le moment

$$\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{P}_{\text{personne}}) = Mgd \cos \theta \vec{e}_x.$$

La réaction du mur produit le moment

$$\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{N}_A) = -2l N_A \sin \theta \vec{e}_x.$$

L'équilibre impose

$$2l N_A \sin \theta = mgl \cos \theta + Mgd \cos \theta.$$

Ainsi,

$$N_A = \frac{g \cos \theta}{2l \sin \theta} (ml + Md).$$

Or

$$T_B = N_A.$$

La valeur maximale de T_B est obtenue lorsque la personne est au sommet de l'échelle, soit $d = 2l$.

On obtient alors

$$T_B = \frac{(m + 2M)g}{2} \cotan \theta.$$

La condition d'adhérence devient

$$\frac{(m + 2M)g}{2} \cotan \theta \leq f(m + M)g.$$

Après simplification,

$$\tan \theta \geq \frac{m + 2M}{2f(m + M)}.$$

Exercice 2: Mobile sur un plan Incliné (★)

2.1 Absence de Frottement

1. Système {solide} supposé ponctuel dans le référentiel terrestre galiléen.
Repère $\{O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ orthonormé direct selon schéma.
Forces :
Poids $\vec{P} = -mg \cos(\alpha) \vec{u}_y + mg \sin(\alpha) \vec{u}_x$ Réaction normale $\vec{R} = \vec{R}_N = R_N \vec{u}_y$ car absence de frottements.
RFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$
Soit en projection sur :
 $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} = mg \sin(\alpha)$
 $\vec{u}_y$: $m\ddot{y} = 0 = R_N - mg \cos(\alpha)$
soit $\ddot{x} = g \sin(\alpha)$
2. $\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x$ soit par intégration : $\dot{x} = g \sin(\alpha) t$ car $v(t=0) = 0$.
À nouveau par intégration : $x = \frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2$ car $x(t=0) = 0$.
Au point A : $x_A = \frac{H}{\sin(\alpha)}$ donc $t_A = \sqrt{\frac{2H}{g(\sin(\alpha))^2}}$
soit $v_A = \dot{x}_A = g \sin(\alpha) t_A = \sqrt{2gH}$
Vérification avec le théorème de l'énergie mécanique : $E_c(A) + E_p(A) = E_c(O) + E_p(O)$
soit $\frac{1}{2} m v_A^2 + 0 = 0 + mg z_A = mgH$ soit le même résultat.

2.2 Existence de frottements solides (★★)

3. En statique, on a $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ soit en projection :
 $R_T = mg \sin(\alpha_s)$ et $R_N = mg \cos(\alpha_s)$. Les lois de Coulomb nous donnent un lien entre R_T et R_N en statique soit :
 $R_T \leq f_0 R_N$ qui s'écrit ici $\tan(\alpha_s) \leq f_0$.
On aura donc glissement si cette condition n'est pas vérifiée soit $f_0 < \tan(\alpha_s)$.
4. On reprend les équations de la première partie en ajoutant les frottements solides.
On arrive en projection à :
 $\vec{u}_x$: $\ddot{x} = g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))$
 $\vec{u}_y$: $0 = R_N - mg \cos(\alpha)$ identique
Par intégration : $\dot{x} = g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha)) t$ car $v(t=0) = 0$.
À nouveau par intégration : $x = \frac{1}{2} g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha)) t^2$ car $x(t=0) = 0$.
Au point A : $x_A = \frac{H}{\sin(\alpha)}$ donc $t_A = \sqrt{\frac{2H}{g \sin(\alpha)(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha))}}$

$$\text{soit } v_A = \dot{x}_A = \sqrt{2gH \left(1 - \frac{f}{\tan(\alpha)}\right)}$$

Exercice 3: Bloc sur un plan incliné (★★)

1. Les forces appliquées au bloc sont :
 - le poids $\vec{P} = M\vec{g}$ en G ;
 - la réaction normale $\vec{N} = N\vec{e}_z$ en un point de la surface de contact avec le plan ;
 - la force de frottement tangentielle $\vec{T} = -T\vec{e}_x$.
 À la limite du glissement, $T = fN$.
L'équilibre des forces projetées suivant la pente donne $T = Mg \sin \alpha$.
La projection suivant la normale au plan conduit à $N = Mg \cos \alpha$.
En combinant ces deux relations,

$$Mg \sin \alpha = f Mg \cos \alpha.$$

Le glissement apparaît donc lorsque $\tan \alpha > f$.

2. Le basculement est étudié en considérant les moments des forces au point I.
À la limite de basculement, le point de contact entre le bloc et la surface est I. Donc la réaction passe par I et ne crée pas de moment.
Il y aura basculement si le poids engendre une rotation dans le sens horaire, donc que le centre de masse se situe à droite de I.
Le basculement débute lorsque cette verticale en G passe exactement par I, soit

$$\tan \alpha = \frac{l}{h}.$$

Le basculement se produit donc pour $\tan \alpha > \frac{l}{h}$.

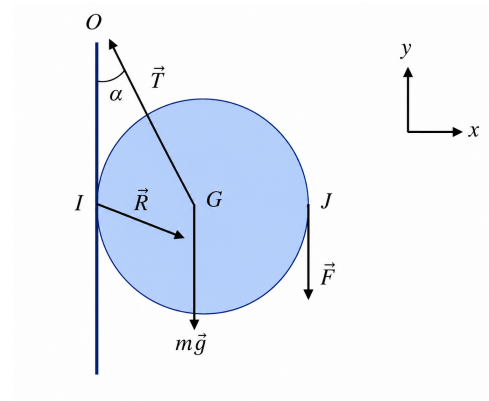
3. Le glissement doit intervenir avant le basculement. Il faut donc que $f < \frac{l}{h}$, soit $h < \frac{l}{f}$.
Pour $f = 0,5$, on obtient $h < 2l$. Donc si $h < 2l$, le bloc glisse avant de basculer.

Exercice 4: L'arc-boutement (★)

1. Le cylindre est soumis à
 - son poids $\vec{p} = -mg\vec{e}_y$;
 - la tension du fil $\vec{T} = T(-\sin \alpha)\vec{e}_x + \cos \alpha\vec{e}_y$;
 - la réaction du mur $\vec{R} = R_N\vec{e}_x + R_T\vec{e}_y$;

— la force $\vec{F} = -F\vec{e}_y$.

La composante tangentielle s'oppose à un éventuel glissement selon $+\vec{e}_y$ engendré par la force $\vec{F}$. Cette force crée un moment qui provoquerait une rotation du cylindre autour de l'axe (Gz) dans le sens horaire.



À l'équilibre $\vec{a}_G = \vec{0}$ et $\sum_i \vec{M}_G(\vec{F}_i) = \vec{0}$:

$$\begin{cases} R_N = T \sin \alpha \\ -R_T - mg - F + T \cos \alpha = 0 \\ R_T - F = 0 \end{cases}$$

En utilisant les deux dernières équations, on a

$$T = \frac{2F + mg}{\cos \alpha} \quad \text{donc} \quad R_N = (2F + mg) \tan \alpha$$

Il y a adhérence si $|R_T| < f R_N$, soit

$$F < \frac{fmg \tan \alpha}{1 - 2f \tan \alpha} = F_0$$

Si $F = F_0$ alors on est à la limite du glissement.

2. On remarque que si $f \geq \frac{1}{2 \tan \alpha}$, le glissement n'est plus possible, le cylindre est arc-bouté. On constate que cette condition est indépendante de m !

Par exemple, si $\alpha = 45$ degré, alors la condition d'arc-boutement est $f \geq 0,5$, ce qui est raisonnable.

Exercice 5: Un bon cerveau vaut mieux que du muscle (★★)

1. On isole un élément infinitésimal de corde correspondant à un angle $\delta\theta$ entre $\theta - \delta\theta/2$ et $\theta + \delta\theta/2$. On note $T(\theta)$ la norme de $\vec{T}(\theta)$.

Les actions mécaniques exercées sur cet élément sont :

- la tension $\vec{T}(\theta - \delta\theta/2) = -T(\theta - \delta\theta/2) (\sin(\delta\theta/2) \vec{e}_r + \cos(\delta\theta/2) \vec{e}_\theta)$;
- la tension $\vec{T}(\theta + \delta\theta/2) = T(\theta + \delta\theta/2) (-\sin(\delta\theta/2) \vec{e}_r + \cos(\delta\theta/2) \vec{e}_\theta)$;
- la réaction normale $d\vec{R}_N = dR_N \vec{e}_r$ de la bitte ;
- la réaction tangentielle $d\vec{R}_T = -dR_T \vec{e}_\theta$.

On applique la seconde loi de Newton que l'on projette selon $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ (on simplifie les cosinus et sinus au premier ordre) :

$$\begin{cases} \underbrace{-T(\theta - \delta\theta/2) + T(\theta + \delta\theta/2)}_{\delta\theta \frac{dT}{d\theta}} - dR_T = 0 \\ \frac{\delta\theta}{2} \underbrace{(T(\theta - \delta\theta/2) + T(\theta + \delta\theta/2))}_{2T(\theta)} = dR_N \end{cases}$$

La corde est supposée à la limite du glissement, donc on peut écrire $dR_T = f dR_N$. On obtient alors l'équation différentielle

$$\boxed{\frac{dT}{d\theta} = f T(\theta)}.$$

Par intégration entre l'entrée ($\theta = 0$ et $T(0) = T$) et la sortie ($\theta = \alpha$ et $T(\alpha) = T'$), on trouve

$$\boxed{\frac{T'}{T} = e^{f\alpha}}.$$

Interprétation La tension augmente de manière exponentielle avec l'angle d'enroulement.

Chaque tour supplémentaire autour de la bitte multiplie donc la force transmise par un facteur constant.

2. La tension appliquée par la personne est

$$T = T' e^{-f\alpha}.$$

Ainsi, pour un coefficient de frottement modéré et plusieurs tours de corde, le facteur $e^{-f\alpha}$ devient très petit.

Une faible force exercée par la personne suffit alors à équilibrer une traction très importante exercée par le bateau.

Ce phénomène est connu sous le nom de *formule du cabestan* et est utilisé sur les bittes d'amarrage, les cabestans et les winchs des voiliers.

Exercice 6: Roulement d'un cylindre dans un camion (★★)

1. On étudie le cylindre dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$. Il est soumis :

- à son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$;
- à la réaction normale du plateau $\vec{N} = N\vec{e}_y$, avec $N > 0$;
- à la réaction tangentielle du plateau $\vec{T} = T\vec{e}_x$, avec $T > 0$ qui s'oppose d'un éventuel glissement qui aurait lieu selon $-\vec{e}_x$;
- à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(G) = -m\vec{\gamma} = -m\gamma\vec{e}_x$.

D'après le théorème du centre d'inertie :

$$m\vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} m\ddot{x} = -m\gamma + T \\ 0 = N - mg \end{cases} \quad (1)$$

Pour étudier la rotation du cylindre, on va appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à (Gz) dans le référentiel barycentrique :

$$J\ddot{\theta} = M_{(Gz)}(\vec{P}) + M_{(Gz)}(\vec{N}) + M_{(Gz)}(\vec{T}) + M_{(Gz)}(\vec{F}_{ie})$$

Seul le moment de $\vec{T}$ est non nul. On rappelle que la force d'inertie s'applique en G . On a donc

$$J\ddot{\theta} = rT \quad \text{soit} \quad \boxed{T = \frac{1}{2}mr\ddot{\theta}}$$

Comme il y a roulement sans glissement, on a $\ddot{x} = -r\ddot{\theta}$. On en déduit

$$T = -\frac{1}{2}m\ddot{x}$$

On injecte dans l'équation (1) :

$$m\ddot{x} = -m\gamma - \frac{1}{2}m\ddot{x} \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{x} = -\frac{2}{3}\gamma}$$

Par intégration,

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{3}\gamma t^2 - r}$$

Le cylindre commence à tomber du plateau quand $x(t_f) = -l$, soit

$$\boxed{t_f = \sqrt{\frac{3(\ell - r)}{\gamma}}}$$

Le camion ayant un mouvement à accélération constante, il parcourt la distance

$$D = \frac{1}{2}\gamma t_f^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{D = \frac{3}{2}(\ell - r)}$$

2. Il y a roulement sans glissement si $T < fN$. Or

$$T = -\frac{1}{2}m\ddot{x} \quad \text{et} \quad \ddot{x} = -\frac{2}{3}\gamma \quad \text{donc} \quad T = \frac{1}{3}m\gamma$$

De plus, $N = mg$, donc il faut que $\boxed{\gamma < 3fg}$.

Exercice 7: Expérience de Timochenko (★★)

1. On note S la planche, S_1 le cylindre 1 et S_2 le cylindre 2. On note I_1 le point de contact entre S et S_1 , et I_2 celui entre S et S_2 .

La vitesse de glissement sur le cylindre 1 est

$$\vec{v}_{g,1} = \vec{v}_{I_1 \in S} - \vec{v}_{I_1 \in S_1} = \underbrace{(\dot{x} - b\omega)}_{<0} \vec{e}_x \quad \text{donc} \quad R_{1T} > 0$$

La vitesse de glissement sur le cylindre 2 est

$$\vec{v}_{g,2} = \vec{v}_{I_2 \in S} - \vec{v}_{I_2 \in S_2} = \underbrace{(\dot{x} + b\omega)}_{>0} \vec{e}_x \quad \text{donc} \quad R_{2T} < 0$$

Ces deux conditions ne peuvent pas être réalisées simultanément.

La condition de glissement impose, d'après les lois de Coulomb :

$$|R_{1T}| = fR_{1N} \quad \text{et} \quad |R_{2T}| = fR_{2N}$$

On lève les valeurs absolues :

$$\boxed{R_{1T} = fR_{1N} \quad \text{et} \quad R_{2T} = -fR_{2N}}$$

2. Le solide S est animé d'un mouvement de translation, donc d'après la seconde loi de Newton :

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \vec{P} = m\vec{a}(G) \quad \text{soit} \quad \begin{cases} m\ddot{x} = R_{1T} + R_{2T} = f(R_{1N} - R_{2N}) \\ R_{1N} + R_{2N} = mg \end{cases}$$

Il n'y a pas de pivotement donc

$$\vec{M}_{(Gy)}(\vec{R}_1) + \vec{M}_{(Gy)}(\vec{R}_2) + \vec{M}_{(Gy)}(\vec{P}) = \vec{0}$$

On note $a = OI_2 = OI_1$, alors

$$R_{2N}(a - x) = R_{1N}(a + x) \quad \text{soit} \quad a \underbrace{(R_{1N} - R_{2N})}_{m\ddot{x}/f} + x \underbrace{(R_{1N} + R_{2N})}_{mg} = 0$$

On en déduit l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \frac{fg}{a}x(t) = 0$$

On a bien l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{fg}{a}}.$$

En mesurant la pulsation des oscillations, on peut en déduire le coefficient de frottement dynamique f .

3. La planche ne décolle jamais si $R_{iN} > 0$ au cours du mouvement.

D'après les équations données par la seconde loi de Newton :

$$m\ddot{x} = f(R_{1N} - R_{2N}) \quad \text{et} \quad R_{1N} + R_{2N} = mg$$

On a alors

$$m\ddot{x} = f(2R_{1N} - mg) \quad \text{soit} \quad 2R_{1N} = \frac{m}{f}\ddot{x} + mg$$

Or d'après l'équation différentielle, $\ddot{x} = -\frac{fg}{a}x$, donc

$$R_{1N} = mg\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

La résolution de l'équation différentielle donne

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \in [-x_0, x_0]$$

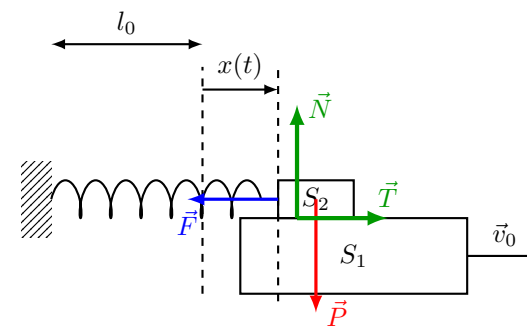
On a donc que $R_{1N} > 0 \forall t$ si $x_0 < a$.

Exercice 8: Stick-slip et vibrations d'une corde de violon (★★)

Modélisation

1. S_1 correspond à l'archet, S_2 à la corde. C'est la force de rappel horizontale de la corde (due à ses attaches à ses extrémités, et à son élasticité "intrinsèque") qui est modélisée par le ressort.

Dans la situation réelle, il faut effectuer une rotation de π pour que S_1 soit au-dessus de S_2 et que l'archet (donc S_1) soit déplacé vers la gauche.



- 2.
3. En situation d'adhérence, la vitesse de glissement est nulle, donc $v = v_0$.

On quitte cette situation lorsque la norme T de la composante tangentielle vérifie $T = f_s N$.

Appliquons la seconde loi de Newton à S_1 dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans la situation d'adhérence, $\vec{a}_{S_2} = \vec{0}$, donc en projetant on a :

$$\begin{cases} T = kx \\ N = mg \end{cases}$$

On constate que T croît avec $x(t) = v_0 t + \text{cste}$. On sort de l'adhérence quand

$$x = \frac{f_s mg}{k}$$

4. En situation de glissement, on a $T = f_d N = f_d mg$.

Dans notre cas, lorsqu'il y a glissement, le solide S_2 revient vers la gauche et $v < v_0$. Donc la vitesse de glissement est selon $-\vec{e}_x$, donc $\vec{T}$ est selon $+\vec{e}_x$. L'application de la seconde loi de Newton selon x donne :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + f_d mg$$

On quitte la situation de glissement lorsque $v = v_0$.

Comme $v < v_0$ en phase de glissement, alors on peut écrire qu'il y a adhérence quand $v > v_0$. On va travailler avec une inégalité pour des raisons numériques!

Résolution numérique

Exercice 9: Analyse d'un mouvement « collé-glissé » (stick-slip) (★★★)

Analyse théorique

1. L'application de la seconde loi de Newton à la poutre projetée selon la verticale donne :

$$R_{N1} + R_{N2} = mg$$

On exprime aussi que le moment des forces est nul à l'équilibre. On le calcule par rapport à G , alors

$$R_{N2}(D_0 - a_0) = R_{N1}a_0$$

On en déduit

$$R_{N1} = mg \frac{D_0 - a_0}{D_0} \quad \text{et} \quad R_{N2} = mg \frac{a_0}{D_0}$$

2. La théorème du moment cinétique restant valable dans le référentiel barycentrique, on conserve les équations précédentes en l'absence de pivotement, donc

$$R_{N1} = mg \frac{D(t) - a(t)}{D(t)} \quad \text{et} \quad R_{N2} = mg \frac{a(t)}{D(t)}$$

3. Le support sur lequel la barre glisse en premier est celui sur lequel la barre appuie le moins. Comme G est plus proche initialement du support 1, c'est sur le support 2 que la barre appuie le moins. Donc le glissement commencera sur le support 2.

La condition de glissement sur le support 2 donne

$$F_2 = f_d R_{N2} = f_d mg \frac{a(t)}{D(t)} \quad \text{si} \quad a(t) = a_0$$

Ce résultat est valable en l'absence de glissement sur le support 1, i.e. $a(t) = a_0$.

Le mouvement de la barre dans le référentiel terrestre est donc une translation rectiligne uniforme $\vec{v}_G(t) = \frac{v_0}{2} \vec{e}_x = \text{cste}$. Donc

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0} \quad \text{soit} \quad F_1 \vec{e}_x - F_2 \vec{e}_x = \vec{0}$$

On a donc

$$F_1 = F_2 = f_d R_{N2} = f_d mg \frac{a_0}{D_0 - v_0 t} \quad \text{si} \quad a(t) = a_0$$

4. On a que F_1 augmente quand t augmente, donc il existe t_1 tel que

$$F_1 = f_s R_{N1} \quad \text{soit} \quad f_d mg \frac{a_0}{D_0 - v_0 t_1} = mg f_s \frac{D_0 - v_0 t_1 - a_0}{D_0 - v_0 t_1}$$

On en déduit

$$D_1 = a_0 \left(1 + \frac{f_d}{f_s} \right) \quad \text{et} \quad t_1 = \frac{f_s D_0 - a_0 (f_d + f_s)}{f_s v_0}$$

5. Au delà de t_1 , la poutre glisse sur les deux supports glissent car aucune des conditions d'absence de glissement n'est réalisée.

La vitesse de glissement sur le support 1 est dirigée vers la gauche et celle sur le support 2 est dirigée vers la droite. Les forces tangentielles sont donc de sens contraire, soit

$$\vec{T}_1 = f_d R_{N1} \vec{e}_x = f_d mg \frac{D(t) - a(t)}{D(t)} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{T}_2 = -f_d R_{N2} \vec{e}_x = -f_d mg \frac{a(t)}{D(t)} \vec{e}_x$$

On fait la somme

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = f_d mg \frac{D(t) - 2a(t)}{D(t)} \vec{e}_x$$

À $t = t_1$, $D_1 = a_0 (1 + f_d/f_s)$. Comme $f_f < f_s$, on a $D_1 < 2a_0$ et donc

$$(\vec{T}_1 + \vec{T}_2) \cdot \vec{e}_x < 0 \quad \text{à} \quad t_1.$$

En appliquant la seconde loi de Newton, on a donc un ralentissement du mouvement de G initial, donc v_G diminue et devient inférieure à $v_0/2$. La vitesse va continuer à décroître jusqu'à $-v_0/2$, condition d'adhérence sur le support 2. Durant cette phase $\vec{T}_1 + \vec{T}_2$ reste selon $-\vec{e}_x$.

Ainsi cette phase s'arrête quand

$$\vec{v}_G(t'_1) = -\frac{v_0}{2} \vec{e}_x \quad \text{soit} \quad \frac{da}{dt}(t'_1) = -v_0$$

6. On utilise la seconde loi de Newton :

$$m\ddot{x} = f_d mg \frac{D(t) - 2a(t)}{D(t)}$$

Or $x(t) = \frac{v_0}{2}t + a(t)$, donc

$$2a(t) = v_0 t - 2x(t) \quad \text{donc} \quad \boxed{\ddot{x} = f_d g \frac{D_0 - 2x(t)}{D_0 - v_0 t}}$$

7. Lors de la phase suivante, il y a adhérence sur le support 2 et glissement sur le support 1. Cette phase s'étudie donc comme à la question 4, les rôles de 1 et 2 sont inversés, et les CI deviennent $D(t'_1)$ et $a(t'_1)$ d'où

$$\boxed{D(t_2) = \left(1 + \frac{f_d}{f_s}\right) (D(t'_1) - a(t'_1)) .}$$

8. Si on peut négliger la durée de la phase de glissement des 2 supports, on assimile $D(t'_1)$ à

$$D(t'_1) \approx D(t_1) = a_0 \left(1 + \frac{f_d}{f_s}\right) \quad \text{et} \quad a(t'_1) \approx a(t_1) = a_0$$

On en déduit

$$D(t_2) \approx \left[a_0 \left(1 + \frac{f_d}{f_s}\right) - a_0 \right] \left(1 + \frac{f_d}{f_s}\right) = \frac{f_d}{f_s} D(t_1)$$

On peut donc déterminer expérimentalement f_d/f_s en calculant les rapports successifs des longueurs entre les 2 supports lorsque le glissement change de côté.

Simulation