

Feuille d'exercices n°13

Exercice 1 (*)

Montrer que $] -1 ; 1 [$ muni de la loi $\star$ définie par $x \star y = \frac{x+y}{1+xy}$ est un groupe commutatif.

Exercice 2 (**)

Soit φ un morphisme non constant d'un groupe fini $(G, \star)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. Calculer

$$\sum_{x \in G} \varphi(x)$$

On pourra considérer l'application $x \mapsto a \star x$ avec $a \in G$ bien choisi.

Exercice 3 (*)

On pose

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif puis déterminer $U(\mathbb{Z}[i])$. On pourra considérer l'application $N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto z\bar{z}$.

Exercice 4 (**)

On note

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n}, (p, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$$

1. Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Déterminer $U(\mathbb{D})$.

Exercice 5 (**)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Un élément $x \in A$ est dit *nilpotent* s'il existe n entier non nul tel que $x^n = 0_A$. On note

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in A \mid x \text{ nilpotent}\}$$

1. Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A .
2. Soit $a \in \mathcal{N}(A)$. Montrer que $1_A - a$ est inversible.
3. Soit $a \in \mathcal{N}(A)$ et b inversible. Montrer que $a + b$ est inversible.

Exercice 6 (**)

Un idéal I d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est dit *premier* si

$$\forall x, y \in A \quad xy \in I \implies x \in I \text{ ou } y \in I$$

Décrire les idéaux premiers de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Exercice 7 (**)

Soit n entier. Déterminer le reste de la division euclidienne X^n par $(X - a)(X - b)$ avec a, b dans $\mathbb{K}$.

Exercice 8 (*)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg P \geq 1$. Déterminer r le nombre de racines de P en fonction de P et $P \wedge P'$.

Exercice 9 (**)

Soit $(T_n)_n$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X, \quad \forall n \geq 2 \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}$$

1. Calculer T_2, T_3 .
2. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de T_n .
3. Montrer que $\forall (n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \quad T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$
4. En déduire une expression factorisée de T_n .

Exercice 10 (*)

Soit
$$\varphi: \begin{cases} \mathbb{K}_{2n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{2n} \\ P \longmapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n-1)}(0), P(1), P'(1), \dots, P^{(n-1)}(1)) \end{cases}$$

Montrer que φ est bijective.

Exercice 11 (**)

Soit $X \subset \mathbb{R}_+$ un ensemble fini non vide. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in X \quad P(x) = \sqrt{x}$$

Exercice 12 (*)

Parmi les ensembles suivants, lesquels ont une structure de $\mathbb{K}$ -algèbres :

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

Exercice 13 (*)

Déterminer les morphismes de $\mathbb{R}$ -algèbres de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.