

Feuille d'exercices n°14

Exercice 1 (**)

On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant égal à 1. Montrer que $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe.

Exercice 2 (***)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ de cardinal fini n . Montrer

$$\dim \bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}(g - \mathrm{id}) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g)$$

Exercice 3 (****)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Montrer

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad 1_A - xy \in U(A) \iff 1_A - yx \in U(A)$$

On pourra supposer en premier lieu que xy est nilpotent.

Exercice 4 (**)

Soit I un idéal d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$. On définit le *radical* de I noté $R(I)$ par

$$R(I) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : x^n \in I\}$$

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I .
2. Montrer que pour I, J des idéaux de A , on a

$$I \subset J \implies R(I) \subset R(J) \quad R(I \cap J) = R(I) \cap R(J) \quad R(I) + R(J) \subset R(I + J)$$

3. Soit I idéal de A . Montrer $R(R(I)) = R(I)$

Exercice 5 (**)

Que peut-on dire d'une suite croissante d'idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$?

Exercice 6 (**)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples avec $\deg P > 1$.

1. Montrer que P' est également scindé à racines simples.
2. Montrer que P ne peut avoir deux coefficients nuls consécutifs.

Exercice 7 (**)

Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Montrer

$$\exists! (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \mid \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(x_k)$$

Exercice 8 (**)

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad c_k(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt$$

1. Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, déterminer $c_k(P)$ en fonction des coefficients de P .
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

Exercice 9 (***)

Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ unitaire. Montrer que toute racine ω de P vérifie

$$|\omega| \leq 1 + \max_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} |a_k|$$

Exercice 10 (***)

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On note $M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

Montrer $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad |a_k| \leq M$

Exercice 11 (***)

On définit $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \quad \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Pour n entier non nul, on note

$$P_n = (X+1)^n - (X-1)^n \quad C_n = \sum_{k=1}^{n-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2$$

avec pour convention $\sum_{k=1}^0 \dots = 0$.

1. Pour n entier non nul, déterminer une écriture factorisée de P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Notant $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ les racines de P_n , déterminer le coefficient de degré $\deg(P_n) - 2$ de P_n .
3. En déduire la valeur de C_n pour tout n entier non nul.