

Feuille d'exercices n°15

Exercice 1 (***)

On pose

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$$

1. Soient u, v dans $\mathbb{Z}[i]$ avec $v \neq 0$. Montrer qu'il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que $u = qv + r$ et $|r| < |v|$.
2. Montrer que les idéaux de $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ sont exactement les $v\mathbb{Z}[i]$ avec $v \in \mathbb{Z}[i]$.

Indications : 1. Notant $\frac{u}{v} = x + iy$ avec x et y réels, considérer $q = a + ib$ avec a et b entiers relatifs les plus proches respectivement de x et y .
2. Suivre la même démarche que pour les idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 (****)

Un anneau intègre $(A, +, \times)$ est dit *principal* si tout idéal de cet anneau est engendré par un élément. On note $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + ib\sqrt{5}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ muni des opérations $(+, \times)$.

1. Vérifier que $(A, +, \times)$ est un anneau commutatif.
2. Pour $z \in A$, on note $N(z) = z\bar{z}$. Vérifier que

$$\forall (z, z') \in A^2 \quad N(zz') = N(z)N(z')$$

En déduire $U(A)$.

3. Après avoir vérifié que $(1 + i\sqrt{5}) \times (1 - i\sqrt{5}) = 2 \times 3$, conclure que l'anneau n'est pas principal.

Indications : 1. Vérifier que A est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.

2. Observer que $N(z) \in \mathbb{N}$ pour $z \in A$.

3. Un élément p de A est dit *irréductible* si $p \notin U(A)$ et si

$$\forall (a, b) \in A^2 \quad p = ab \implies a \in U(A) \text{ ou } b \in U(A)$$

Vérifier que $1 + i\sqrt{5}$, 2 et 3 sont irréductibles. Puis supposer l'anneau A principal et obtenir une contradiction en considérant $(1 + i\sqrt{5}) + (2)$.

Exercice 3 (***)

Soit $(\mathbb{K}, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{R}$ -algèbre commutative, intègre, de dimension finie $n \geq 2$. On note 0 et 1 les éléments neutres de $\mathbb{K}$ et pour alléger les notations, on confond $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}1$.

1. Soit a un élément non nul de $\mathbb{K}$. Pour $x \in \mathbb{K}$, on pose $f_a(x) = ax$. Montrer que f est un automorphisme linéaire de $\mathbb{K}$.
2. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(1, a)$ est libre mais pas $(1, a, a^2)$.
3. Montrer que l'on peut trouver $i \in \mathbb{K}$ tel que $i^2 = -1$. En déduire que $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre isomorphe à $\mathbb{C}$.

Indications : 1. Déterminer $\text{Ker } f_a$.

2. Choisir $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$ puis considérer la famille $(a^k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ et en déduire l'existence d'un polynôme non nul $R = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R(a) = 0$. Considérer enfin l'écriture de R comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ pour exhiber un facteur P_a de degré 2 tel que $P_a(a) = 0$.

3. Choisir P_a unitaire et construire, par factorisation canonique, un élément $b \in \mathbb{K}$ tel que $b^2 = -1$. Conclure en vérifiant $\mathbb{K} = \text{Vect}(1, b)$.

Exercice 4 (***)

Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Indications : Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P'|P$, justifier que $P = \lambda(X - \alpha)P'$ avec α, λ des scalaires puis notant m l'ordre de α et $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \lambda(X - \alpha)^m Q$, établir $Q' = 0$. On peut aussi considérer la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5 (****)

Pour P dans $\mathbb{C}[X]$, on note $Z(P)$ l'ensemble des racines de P .

1. Soit P dans $\mathbb{C}[X]$ avec $\deg P \geq 1$. Montrer

$$\text{Card } Z(P) = \deg P - \deg(P \wedge P')$$

2. Soient P, Q des polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$ tels que $Z(P) = Z(Q)$ et $Z(P - 1) = Z(Q - 1)$. Montrer que $P = Q$.

Indications : 1. En considérant une écriture factorisée de P , en déduire une écriture de $P \wedge P'$ puis la relation attendue.

2. Supposer $\deg P = n \geq m = \deg Q$ puis poser $R = P - Q$. Comparer $Z(R)$ avec $Z(P)$ et $Z(P - 1)$ puis établir que $P \wedge P'$ et $(P - 1) \wedge P'$ sont des facteurs premiers de P' .

Exercice 6 (***)

Soient P, Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants avec $\deg P = n$ et $\deg Q = m$. On pose

$$\Phi: \begin{cases} \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow \mathbb{C}_{n+m-1}[X] \\ (U, V) & \longmapsto UP + VQ \end{cases}$$

1. Montrer que Φ est bien définie, linéaire puis déterminer sa matrice dans les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée. On notera $\text{Res}[P, Q]$ le déterminant de cette matrice appelé *résultant* de P et Q .

2. Établir $\Phi \text{ bijective} \iff P \wedge Q = 1$

3. Soit $P = X^3 + px + q$ avec $p, q \in \mathbb{C}$. Montrer que P admet une racine double si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Indications : 1. Considérer $(X^i, 0)_{0 \leq i \leq m-1}$ suivi de $(0, X^{i-m})_{m \leq i \leq n+m-1}$ base canonique de $\mathbb{C}_{m-1}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

2. Utiliser la relation de Bézout pour le sens direct et le lemme de Gauss pour la réciproque.

3. Traduire en une relation entre P et P' le fait d'avoir une racine double pour P' .