

Préparation à l'interrogation n°04

1 Trigonométrie

$$1. \sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \quad 2. \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

2 Calcul intégral

$$1. \int^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad 2. \int^x \operatorname{Arctan}(t) dt \quad 3. \int^x \frac{dt}{a^2+t^2} \text{ avec } a \neq 0$$

3 Formules

$$1. \text{ Inégalité de Taylor-Lagrange} \quad 2. x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

4 Étude asymptotique

1. Développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de $\operatorname{sh}(x)$
2. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$
3. Développement limité à l'ordre 2 en zéro de

$$1 - \cos(t)^n = 1 - \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{nt^2}{2} + o(t^2)\right) = \frac{nt^2}{2} + o(t^2)$$

5 Calcul matriciel

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par $AB = (c_{i,j})_{i,j}$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}$ pour tout $(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; q \rrbracket$;
2. Soit $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a la relation
$$\forall (i,j,k,\ell) \in \llbracket 1; n \rrbracket^4 \quad E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$
3. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On a $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$;
4. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$;
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\operatorname{ACom}(A)^\top = \operatorname{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$$

6 Polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et m entier non nul. On a

$$a \text{ racine d'ordre } m \iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$$

$$a \text{ racine d'ordre au moins } m \iff P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$$

7 Exercice type

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec n entier. Pour $P \in E$, on pose $\varphi(P) = (X - 1)P' - nP$. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, préciser sa matrice dans la base canonique puis déterminer une base de $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

Corrigé : L'application φ est linéaire par linéarité du produit à gauche et de la dérivation puis $\varphi(X^k) = (k - n)X^k - kX^{k-1}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Notant $\mathcal{C}$ la base canonique de E , on a

$$\text{mat}_{\mathcal{C}}\varphi = \begin{pmatrix} -n & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-1) & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer $\text{Ker } \varphi$, on résout l'équation différentielle $(t - 1)x' - nx = 0$ sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$. On trouve $\text{Vect}(t \mapsto (t - 1)^n)$ comme espace de solutions d'où $(X - 1)^n$ générateur de $\text{Ker } \varphi$. D'après le théorème du rang, il s'ensuit $\text{rg } \varphi = n$. D'après la forme de la matrice, on a $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et l'inclusion est une égalité par égalité des dimensions. Ainsi, on conclut

$$\boxed{((X - 1)^n) \text{ base de } \text{Ker } \varphi, (X^k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket} \text{ base de } \text{Im } \varphi}$$

8 Exercice type

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(M) = 1$. Montrer qu'il existe X et Y des matrices colonnes non nulles telles que $M = XY^\top$.

Corrigé : Il existe une colonne X de M non nulle. Toutes les autres colonnes de M sont colinéaires à celle-ci d'où $M = (y_1 X | \dots | y_n X) = XY^\top$ avec Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \neq 0$ puisque l'un des y_j vaut 1.

9 Exercice type

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{rg}(M) = 1$. Déterminer une expression simple de M^2 en fonction de M .

Corrigé : On utilise le résultat de l'exercice précédent. Il existe des matrices colonnes non nulles X et Y telles que $M = XY^\top$. Par suite, avec l'associativité du produit matriciel, il vient

$$M^2 = (XY^\top)(XY^\top) = X \underbrace{(Y^\top X)}_{\in \mathbb{K}} Y^\top = (Y^\top X)M$$

Or, d'après la propriété fondamentale de la trace, on a

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(XY^\top) = \text{Tr}(Y^\top X) = Y^\top X$$

Ainsi

$$\boxed{M^2 = \text{Tr}(M)M}$$

10 Questions de cours

Structures, révisions et compléments d'algèbre linéaire, graphes usuels.